

---

**TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI**  
Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Studijní program: N2612 – Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: 3902T005 – Automatické řízení a inženýrská informatika

**Syntéza regulačního obvodu se stavovým  
regulátorem s ohledem na jeho robustnost**

**Robust Aspects of State Space Control Loop  
Design**

**Diplomová práce**

Autor:	Bc. Milan Slapnička
Vedoucí práce:	doc. Ing. Josef Janeček, CSc.
Konzultant:	Ing. Pavel Herajtn

**V Liberci 21. 5. 2010**

# **Zadání**

### **Prohlášení**

Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé DP a prohlašuji, že **souhlasím** s případným užitím mé diplomové práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom toho, že užít své diplomové práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

Diplomovou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

Datum: 21.5.2010

Podpis:

## **Poděkování**

Rád bych touto cestou poděkoval mé rodině za podporu při studiích, svému vedoucímu diplomové práce panu doc. Ing. Josefu Janečkovi, CSc., za jeho odborné vedení, podporu a cenné rady při tvorbě mé práce. Dále bych chtěl poděkovat kolegům za kolektivní přístup k celému studiu na VŠ.

## **Abstrakt**

Práce se zabývá syntézou regulačního obvodu se stavovým regulátorem s ohledem na kvalitu a robustnost jeho regulačního pochodu. Aplikačním záměrem je řízení pružného ramene robota se čtyřmi různými variantami hmotnosti břemene umístěného na jeho konci. Jsou diskutovány a experimentálně ověřeny různé aspekty ovlivňující kvalitu regulačního obvodu a jeho robustnost.

Klíčová slova: diskrétní regulační obvod, stavová regulace, stabilita, robustní řízení

## **Abstract**

The masters work applies to system of control loop with state controller paying respect to quality and robust of its control process. The aim of application is the control of flexible robot arm with four different loads placed on the end of the arm. The aspects affecting quality and robust of the control loop are being discussed and verified by an experiments.

Key words: numerical control loop, state control, stability, robust control

## Obsah

Úvod.....	8
1 Stavový popis dynamických systémů.....	9
1.1 Základní pojmy .....	12
1.1.1 Stavová trajektorie .....	12
1.1.2 Vnitřní a vnější popis dynamického systému .....	12
1.1.3 Časový vývoj stavového vektoru, fundamentální matice .....	13
1.1.4 Stabilita lineárních systémů ve stavové reprezentaci .....	14
1.1.5 Transformace stavového vyjádření .....	15
1.2 Diskrétní stavový model spojitého systému.....	15
1.3 Estimace stavů.....	18
1.3.1 Deterministický estimátor .....	19
1.4 Regulační obvod se stavovým regulátorem .....	21
1.4.1 Regulační obvod s astatickým členem.....	23
1.5 Metody návrhu regulátoru.....	25
1.5.1 Metoda umístění pólů přenosu uzavřeného obvodu .....	26
1.5.2 Nastavení regulátoru pomocí kvadratického kritéria.....	29
2 Aplikace stavové regulace na reálném laboratorním modelu.....	31
2.1 Identifikace dynamického systému .....	32
2.2 Aspekty neovlivňující chování regulačního obvodu.....	34
2.2.1 Stavová reprezentace regulované soustavy.....	34
2.2.2 Metodika návrhu regulátoru.....	35
2.2.3 Struktura použitého estimátoru .....	39
2.3 Aspekty ovlivňující kvalitu regulace a robustnost regulačního obvodu .....	41
2.3.1 Normalizace stavového popisu .....	41
2.3.2 Vliv periody vzorkování .....	42
2.3.3 Vliv nastavení regulátoru.....	45
2.3.4 Vliv dynamiky estimátoru .....	50
2.3.5 Rozdílný krok regulátoru a estimátoru .....	53
Závěr .....	61
Literatura.....	65
Seznam příloh .....	66

## Seznam použitých zkratk a symbolů

<b>GKR</b>	Gaussova komplexní rovina
<b>KPK</b>	konečný počet kroků
<b>LTI</b>	linear time invariant
<b>MIMO</b>	multi input multi output
<b>SISO</b>	single input single output
<b>ZV</b>	zpětná vazba
<b>n</b>	řád systému
<b>p</b>	počet vstupních ( budicích ) veličin
<b>r</b>	počet výstupních ( vybuzených ) veličin
<b>R</b>	regulátor
<b>S</b>	regulovaná soustava
<b>A, M</b>	matice systému ; rozměr (n, n)
<b>B, N</b>	matice buzení ; (n, p)
<b>C</b>	matice výstupu ; (r, n)
<b>D</b>	matice převodu ; (r, p)
<b>x(t), x(k)</b>	stavový vektor ; (n,1)
<b>u(t), u(k)</b>	vektor buzení ; (p,1)
<b>y(t), y(k)</b>	vektor výstupu ; (r,1)
<b>A/Č resp. Č/A</b>	analogově číslicový resp. číslicově analogový převodník
<b>e(k)</b>	regulační odchylka (v k-tém okamžiku vzorkování)
<b>w(k)</b>	žádaná hodnota regulované veličiny (řídící veličina)
<b>T<sub>s</sub></b>	perioda vzorkování

## Úvod

Zhruba v polovině minulého století došlo v teorii automatického řízení k významné změně v analýze dynamických systémů využívající sofistikované přístupy lineární algebry. Překotný technologický rozvoj s rychle rostoucími požadavky na kvalitu regulace složitých a rozsáhlých dynamických systémů si vynutil jejich kvalitativně přesnější popis a dokonalejší prostředky syntézy zpětnovazebního obvodu. Jako alternativa dosud výhradně používaného vnějšího popisu pomocí diferenciálních rovnic (resp. obrazových přenosů) vznikl fenomén stavové reprezentace využívající dynamických vazeb mezi vnitřními, tzv. stavovými proměnnými, které jednoznačně určují v každém okamžiku stav dynamického systému a jeho další vývoj. Paralelní rozvoj informačních technologií vytvořil na druhé straně také technické prostředky pro realizaci složitějších a komplikovanějších algoritmů řízení, které stavová regulace používá.

V současné době je poměrně detailně rozpracována metodika návrhu stavového regulátoru, který pro výpočet akční veličiny využívá přesné informace o rozvážení dynamického systému reprezentované  $n$ -ticí stavových proměnných. Vhodným návrhem stavového regulátoru lze zásadním způsobem ovlivnit dynamiku celého regulačního obvodu, teoreticky dokonce libovolně. Prakticky jsme však omezeni velikostí a rychlostí změny akční veličiny reálného obvodu, možnostmi akčních a přizpůsobovacích členů a použitých převodníků.

Dalším, poněkud skrytým, ale důležitým omezením je tzv. robustnost zpětnovazebního obvodu, která vyjadřuje jeho citlivost na rozdíl mezi chováním reálné regulované soustavy a jejího předpokládaného matematického modelu. S rostoucími požadavky na rychlost a kvalitu regulačního pochodu rostou i nároky na přesnost modelu. S ohledem na předpokládaný lineární popis je model reálné (v drtivé většině případů více či méně nelineární) regulované soustavy pouze aproximací jejího skutečného chování. V extrémních případech může tato odchylka způsobit i zhroucení reálné aplikace jinak teoreticky velmi dobře navržené regulace.



# 1 Stavový popis dynamických systémů

Řešení diferenciální rovnice, potažmo chování dynamického systému, které tato diferenciální rovnice popisuje, je jednoznačně určeno jednak vlastní diferenciální rovnicí a tvarem budící funkce, ale také systémem počátečních podmínek, které určují tzv. stav systému na začátku dynamického procesu. Tímto úplným souborem počátečních podmínek (n-ticí informací o derivacích vybuzečné funkce, příp. jejich lineárních kombinací, kde n je tzv. řád dynamického systému) lze popsat stav systému v každém okamžiku, nejen na začátku dynamické reakce, s ohledem na fakultativní volbu počátečního bodu. Dynamický popis, tvar budící funkce a stav systému jednoznačně určují jeho následnou reakci v každém okamžiku.

Základní myšlenkou stavového vyjádření je náhrada diferenciální či diferenční rovnice soustavou diferenciálních (resp. diferenčních) rovnic 1. řádu. Matematický formalismus bývá vyjádřen maticovými rovnicemi popisujícími vývoj stavu systému tvořeného n-ticí lineárně nezávislých stavových veličin uspořádaných do stavového vektoru a jeho vztahu k výstupním veličinám systému. V obecném případě

a) pro spojitý popis	b) pro diskrétní popis	
$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k)$	(1)
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$	$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k)$	

$\mathbf{f}, \mathbf{g} \dots$  obecně nelineární funkce

Pro lineární, časově invariantní dynamický systém LTI ( **L**inear **T**ime **I**nvariant) popis přechází do tvaru:

a) pro spojitý popis	b) pro diskrétní popis	
$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k)$	(2)
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$	

Stavový zápis dynamického systému je formálně zcela identický bez ohledu na to, zda je systém popsán jedinou diferenciální či diferenční rovnicí s jednou budicí a jednou vybuzenou veličinou, tzv. SISO (**S**ingle **I**nterface **S**ingle **O**utput), nebo je popsán soustavou rovnic s více vstupy i výstupy (počet vstupů a výstupů nemusí být shodný), tzv. MIMO (**M**ulti **I**nterface **M**ulti **O**utput) systémy. Formálně jednotný zápis dynamiky je jednou z výhod stavového vyjádření.

$n$ .....	řád systému
$p$ .....	počet vstupních ( budicích ) veličin
$r$ .....	počet výstupních ( vybuzených ) veličin
$\mathbf{A}, \mathbf{M}$ .....	matice systému ( $n, n$ )
$\mathbf{B}, \mathbf{N}$ .....	matice buzení ( $n, p$ )
$\mathbf{C}$ .....	matice výstupu ( $r, n$ )
$\mathbf{D}$ .....	matice převodu ( $r, p$ )
$\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(k)$ .....	stavový vektor ( $n, 1$ )
$\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(k)$ .....	vektor buzení ( $p, 1$ )
$\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(k)$ .....	vektor výstupu ( $r, 1$ )

Stavový popis dynamického systému je jednoznačně určen čtveřicí matic  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ , resp.  $\{\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ . Vektory  $\{\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}\}$  jsou v obecném případě vektory časových funkcí, resp. diskrétních posloupností měnících v diskrétních časových okamžicích své funkční hodnoty  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(kT_s)$ ,  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(kT_s)$ ,  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}(kT_s)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  ( $T_s$  ... perioda vzorkování, krok řízení) a uvedené matice stavového popisu jsou maticemi časových funkcí. Pro lineární systémy, jejichž dynamika se v čase nemění (LTI - **L**inear **T**ime **I**nvariant), jsou však matice stavového popisu pouze maticemi číselnými, nezávislými na čase [2].

Speciálně pro systémy s jedním vstupem a jedním výstupem  $p = r = 1$  (SISO), jsou  $\mathbf{u} = u$ ,  $\mathbf{y} = y$  jednovýřkové (skalární) časové funkce, matice  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{N}$  jsou tvořeny pouze jedním sloupcem, matice  $\mathbf{C}$  je jednořádková a matice  $\mathbf{D} = D$  má jeden řádek a jeden sloupec (tedy skalár). Navíc, pro ryze dynamické systémy, kdy nedochází k přímé vazbě vstupu na výstup, je matice  $D = 0$ .

Přísně vzato, dynamika fyzikálních procesů drtivě většiny regulovaných soustav bývá popsána nelineárními rovnicemi, které často z důvodu jednoduchosti jejich analýzy aproximujeme rovnicemi lineárními.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

(3)

resp.

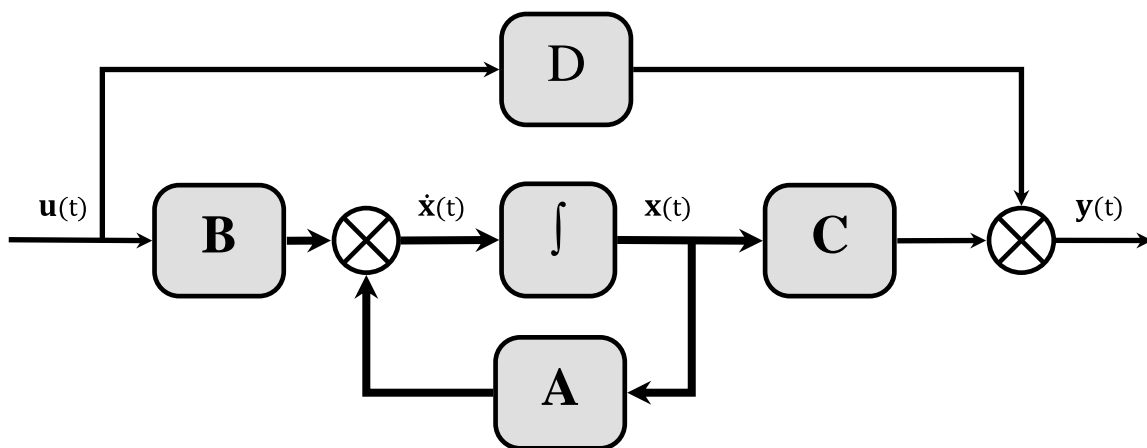
$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k+1) + \dots + a_0 y(k+n) =$$

$$= b_n u(k) + b_{n-1} u(k+1) + \dots + b_0 u(k+n)$$

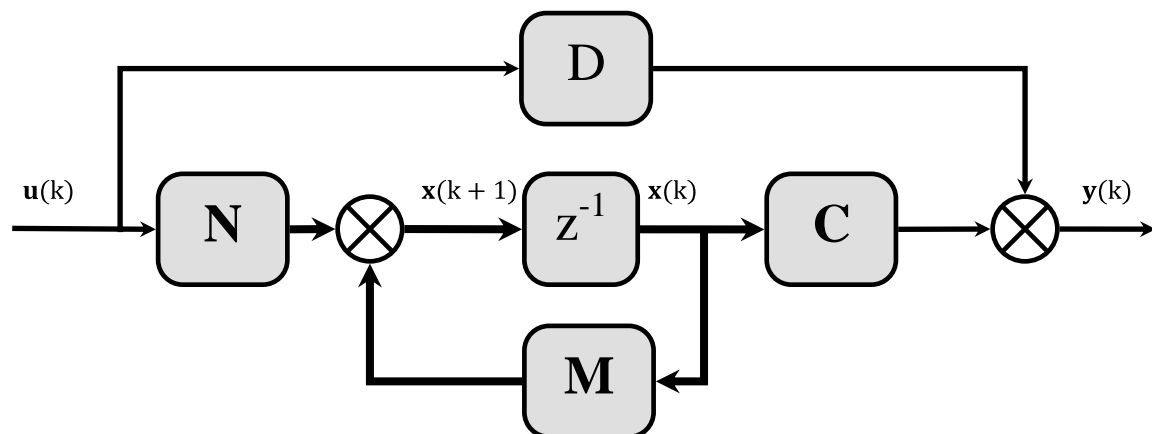
(4)

Nejvyšší derivace ( resp. difference) určuje tzv. řád dynamického systému.

Výhodou stavového popisu je kromě jiného i jeho jednoduchost a formální unifikace popisu bez ohledu na to, zda se jedná o spojité či diskrétní systém libovolného řádu. Unifikuje i některé přístupy k analýze systémů i syntéze celých regulačních obvodů. Jednoduchá formální struktura a nástroje lineární algebry umožňují snadnou algoritmizaci univerzálních matematických nástrojů [4].



Obr.1: Strukturální vazby - spojité systém



Obr.2: Strukturální vazby - diskrétní systém

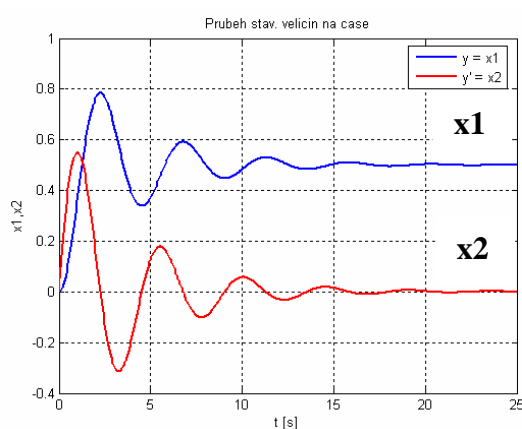
## 1.1 Základní pojmy

### 1.1.1 Stavová trajektorie

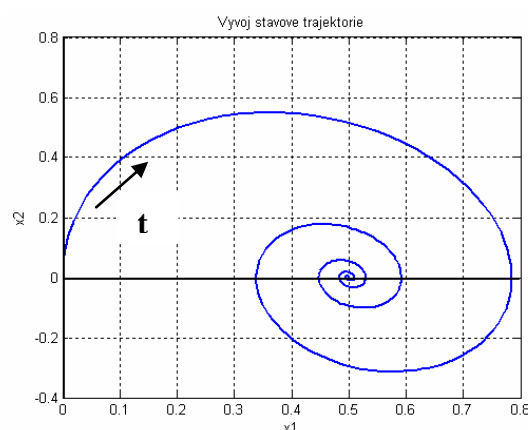
Vývoj dynamického systému lze vyjádřit ve stavové reprezentaci pohybem tzv. zastupujícího bodu, který je jednoznačně určen n souřadnicemi stavového vektoru

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)]^T$$

Poloha zastupujícího bodu vyjadřuje momentální stav systému. Vývoj (časová závislost jednotlivých složek) tvoří obecně prostorovou křivku tzv. stavovou trajektorii ve stavovém prostoru (n-dimenzionální lineární Euklidovský prostor  $E_n$ ).



Obr.3: *Dynamika systému 2.řádu  
v časové oblasti*



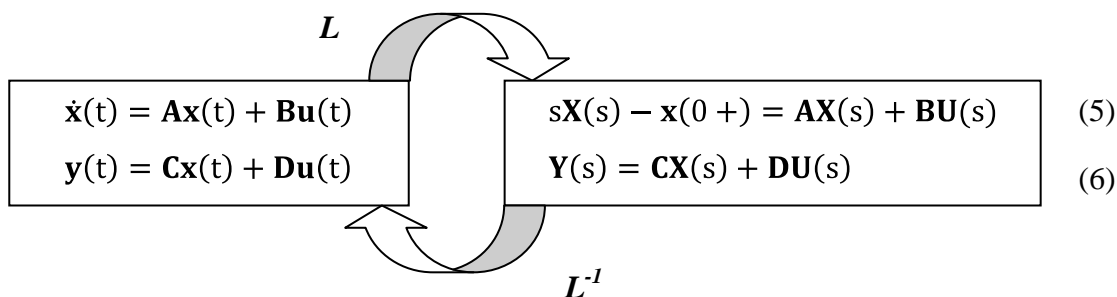
Obr.4: *Stavová trajektorie*

Přechod dynamického systému mezi dvěma různými stavy působením vnějšího signálu  $\mathbf{u}(t)$  není obecně jednoznačný, existuje více možností, jak toho dosáhnout. Způsob jak zvolit nejlepší vnější působení  $\mathbf{u}(t)$  a tím i příslušnou stavovou trajektorii přechodu pro daný systém vede na problematiku optimálního řízení [6].

### 1.1.2 Vnitřní a vnější popis dynamického systému

Vnější popisem rozumíme popis dynamiky systému přenosovou funkcí, resp. diferenciální či diferenční rovnicí, vnitřním popisem naopak jeho stavovou reprezentaci respektující strukturální vnitřní vazby mezi stavovými veličinami.

Souvislost mezi oběma reprezentacemi vyplývá z jednoduché úvahy a řešení příslušných stavových rovnic v Laplaceově transformaci.



Pro nulové počáteční podmínky:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (7)$$

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \rightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Vektor vnitřních stavů  $\mathbf{X}(s)$  vyloučíme jeho dosazením do

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (8)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) \quad (9)$$

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (10)$$

Zcela obdobně s využitím Z-transformace dostaneme pro diskrétní systém

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{U}(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} + \mathbf{D} \quad (11)$$

### 1.1.3 Časový vývoj stavového vektoru, fundamentální matice

Vývoj stavového vektoru v časové oblasti lze v obecném případě vyjádřit inverzní Laplaceovou transformací z jeho obrazu

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0+) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (12)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0+) + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (13)$$

$$L^{-1}\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\} = \Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (14)$$

$\Phi(t)$  ... fundamentální matice systému

Laplaceův obraz stavového vektoru  $\mathbf{X}(s)$  je dán vztahem (13), jeho předmět lze pak vyjádřit konvolutorním vztahem

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0+) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (15)$$

V obecném případě

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (16)$$

Uvedený vztah vyjadřuje časový průběh všech složek stavového vektoru za předpokladu, že známe stav systému v čase  $t_0$  a budicí funkci  $u(\tau)$  na intervalu  $\tau \in \langle t_0, t \rangle$ .

#### 1.1.4 Stabilita lineárních systémů ve stavové reprezentaci

Podmínkou stability lineárního dynamického systému je poloha všech pólů jeho přenosové funkce (kořenů jmenovatele, tzv. charakteristického polynomu) v levé polorovině Gaussovy roviny. Z tvaru přenosové funkce

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (17)$$

je zřejmé, že je charakteristický polynom shodný s charakteristickým polynomem matice systému  $\Delta(\mathbf{A}) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$  a jeho kořeny, tedy vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$ , jsou identické s póly přenosové funkce. Platí proto vše, co platí o pólech přenosové funkce, beze zbytku i o vlastních číslech systémové matice  $\mathbf{A}$ .

Podmínkou stability spojitých lineárních dynamických systémů je poloha všech vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$  v levé polorovině Gaussovy roviny bez ohledu na jejich násobnost.

Zcela analogicky platí stejná podmínka o vlastních číslech matice  $\mathbf{M}$  pro diskrétní systémy s tím, že stabilní oblast je v tomto případě vnitřek jednotkové kružnice [1].

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{U}(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} + \mathbf{D} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{M})}{\det(z\mathbf{E} - \mathbf{M})} \mathbf{N} + \mathbf{D} \quad (18)$$

### 1.1.5 Transformace stavového vyjádření

Významnou výhodou stavového popisu dynamického systému je modularita daná volbou báze systému souřadnic jeho stavového prostoru. Lze tak jednoduchou transformací nejen přizpůsobit tvar popisu fyzikální podstatě systému, ale i měnit vyjádření do tvarů vhodných pro některé numerické operace. Přejít od jednoho vyjádření k druhému je určen prostou regulární transformací stavového vektoru  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (21)$$

tedy

$$\boxed{\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}} \quad (22)$$

zcela analogicky i pro diskretní systém

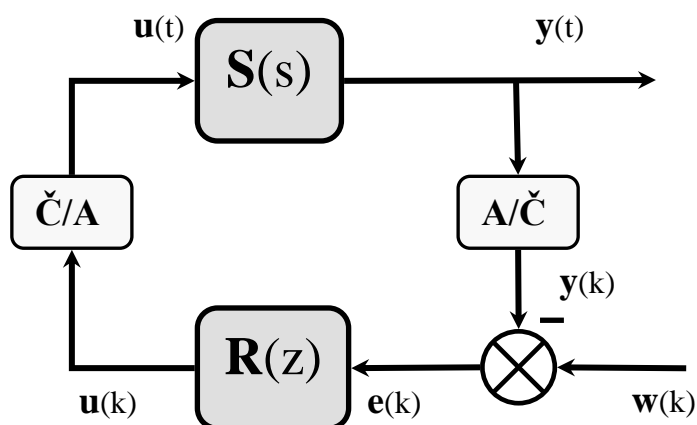
$$\boxed{\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{N}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}} \quad (23)$$

## 1.2 Diskretní stavový model spojitého systému

Technologický rozvoj diskretně pracujících prvků velmi rychle nahradil klasické spojitě regulátory diskretními (pracujícími s informací v digitální podobě). Tato náhrada si vyžádala mimo jiné i modifikaci matematických analytických přístupů.

Svět kolem nás je spojitý. Drtivá většina dynamických systémů a procesů, které se snažíme ovládat, jsou spojitě procesy, které jsou popsány diferenciálními rovnicemi. Číslicový prvek ve zpětné vazbě však pracuje s informací ve formě čísel. Spojitě se měnící veličiny jsou v pravidelných (zpravidla ekvidistantních) okamžicích vzorkovány, jejich pořadnice převedeny do numerické podoby jako posloupnost čísel, kterou číslicový regulátor ve zpětné vazbě zpracovává. Výsledkem jeho činnosti je výpočet optimální hodnoty akční veličiny (v numerické podobě), kterou akční členy

převádějí na spojitou veličinu působící na regulovanou soustavu (technologický proces). Vzhledem k naznačené logice fungování číslicového regulačního obvodu je zřejmé, že akční veličina  $u(t)$  působící na regulovanou soustavu je spojitou tzv. schodovou funkcí, která mění své hodnoty (teoreticky nekonečně rychle) právě jen v okamžicích vzorkování (krok regulace) s tím, že mezi těmito okamžiky je konstantní.



Obr.5: Blokové schéma spojitého systému s číslicovým regulátorem

$S(s)$  ... regulovaná soustava - technologický proces

$R(z)$  ... číslicový regulátor

A/Č resp. Č/A ... analogově číslicový, resp. číslicově analogový převodník

$e(k)$  ... regulační odchylka

$u(t), u(k)$  ... akční veličina

$y(t), y(k)$  ... regulovaná veličina

$w(k)$  ... žádaná hodnota regulované veličiny (tzv. řídicí veličina)

$T_s$  ... perioda vzorkování



Abychom zajistili spolupráci spojitého dynamického systému a numericky pracujícího prvku ve zpětné vazbě, je nutné přejít na diskretní model spojitého systému, který popisuje přesně jeho chování v diskretních okamžicích vzorkování.

Jednou z možností, jak nalézt diskretní model spojitého systému, je řešení rovnic popisujících vývoj jeho stavového vektoru, (viz 1.1.3) za uvedených podmínek a popsat jeho chování v okamžicích vzorkování.

Předpokládejme spojitý stavový popis systému buzeného schodovou funkcí, která mění své hodnoty v pravidelných časových intervalech s periodou vzorkování  $T_s$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (25)$$

Jestliže  $t_0 = k T_s$ ,  $t = (k+1) T_s$  a  $\mathbf{u}(t)$  ... funkce schodová (konstantní mezi okamžiky vzorkování), potom

$$\mathbf{x}[(k+1)T_s] = \Phi[(k+1)T_s - kT_s]\mathbf{x}(kT_s) + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \Phi[(k+1)T_s - \tau]\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (26)$$

Vzhledem k tomu, že je na celém intervalu integrace  $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(kT_s)$  konstantní, lze z konvolutorního integrálu vyjádřit

$$\mathbf{x}[(k+1)T_s] = \underbrace{\Phi(T_s)}_{\mathbf{M}}\mathbf{x}(kT_s) + \underbrace{\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \Phi[(k+1)T_s - \tau]\mathbf{B}d\tau}_{\mathbf{N}}\mathbf{u}(kT_s) \quad (27)$$

$$\mathbf{M} = \Phi(T_s) = e^{\mathbf{A}T_s} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \Phi[(k+1)T_s - \tau]d\tau \mathbf{B} = \\ &= \left[ \begin{array}{l} (k+1)T_s - \tau = \xi \\ -d\tau = d\xi \end{array} \right] = \int_0^{T_s} \Phi(\xi)d\xi \mathbf{B} = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}\xi}d\xi \mathbf{B} = \\ &= \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{e}^{\mathbf{A}T_s} - \mathbf{E}] \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{M} - \mathbf{E}] \mathbf{B} \end{aligned} \quad (29)$$

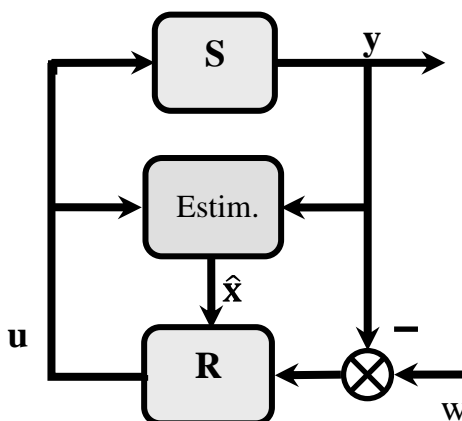
Matice diskrétního modelu můžeme tedy vyjádřit podle následujících vztahů (matice **C** a **D** zůstávají diskretizací nezměněny).

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \Phi(T_s) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T_s} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{M} - \mathbf{E}] \mathbf{B}\end{aligned}\tag{30}$$

Pro astatické systémy (**A** ... singulární) je nutné výpočet matice **N** ošetřit speciálním způsobem.

### 1.3 Estimace stavů

Hlavní myšlenkou stavové regulace je využití úplné informace o rozvážení systému (vyjádřené n-ticí složek stavového vektoru) pro konstrukci akční veličiny, která působí na jeho vstupu a určuje jednoznačným způsobem jeho vývoj. V reálných systémech je však možné fyzické měření všech složek stavového vektoru jen ve zcela výjimečných případech. Neměřitelné složky odhadujeme speciálním zařízením, kterému říkáme estimátor (pozorovatel). Výsledkem jeho činnosti je dynamický odhad  $\hat{\mathbf{x}}$  neměřitelných (někdy i měřitelných) složek stavového vektoru, které pak následně využíváme k výpočtu akční veličiny.



Obr. 6: Regulační obvod s estimátorem

V některých případech, kdy měřitelné veličiny jsou významně zatíženy rušivým šumem nebo nepřesnostmi měření, je výhodnější využívat v řídicím algoritmu veličiny estimované místo měřených. Aditivní stochastický šum je estimátorem vhodně filtrován.

### 1.3.1 Deterministický estimátor

Deterministický přístup, na rozdíl od přístupů stochastických, nepracuje obecně s předpokladem stochastické zátěže regulačního obvodu. Stochastické metody odhadu stavů (např. Kalmanova filtrace) vycházejí z předpokladu náhodného charakteru poruchových signálů a pracují s pravděpodobnostními charakteristikami těchto veličin. Deterministické i stochastické přístupy však vedou ke stejné formální struktuře estimátoru. Jejich parametry jsou však optimalizovány buď vzhledem k dynamice estimačního procesu (deterministické estimátory) nebo vzhledem k pravděpodobnostním momentům předpokládaných náhodných poruchových signálů (stochastické estimátory) [6].

Deterministický estimátor byl navržen A. Luenbergerem (1947), vychází ze znalosti matic **A**, **B**, **C**, **D** resp. **M**, **N**, **C**, **D** stavového popisu a předpokládá měřitelný pouze vstup **u**(t) resp. **u**(k) a výstup **y**(t) resp. **y**(k) dynamického systému. Byť je odhad stavů možné realizovat ve spojitě i diskrétní verzi popisu dynamického systému, budeme se dále zabývat jen jeho diskrétní variantou, protože se vzhledem k jeho relativní složitosti používá v technické realizaci téměř výhradně verze diskrétní. Dynamika estimátoru je popsána formálně stejnými rovnicemi jako jakéhokoliv jiného dynamického systému pouze s tím, že vektor buzení je složen obecně z vektorů **u**(k) a **y**(k)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{M}_E \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{N}_E \mathbf{u}(k) + \mathbf{L} \mathbf{y}(k) = \mathbf{M}_E \hat{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{N}_E, \mathbf{L}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(k)\end{aligned}\tag{31}$$

$\mathbf{M}_E$ ,  $\mathbf{N}_E$  jsou stavové matice estimátoru,  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  je vektor jeho stavu (odhad stavu  $\mathbf{x}(k)$ ) a  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  je dynamickým odhadem výstupu  $\mathbf{y}(k)$ .

Nepřesnost estimace (tj. rozdíl mezi skutečným stavem a jeho odhadem, tzv. chybu estimace) lze jednoduše vyjádřit

$$\Delta \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1)\tag{32}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M} \mathbf{x}(k) + \mathbf{N} \mathbf{u}(k) ; \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k)$$

$$\Delta \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M} \mathbf{x}(k) + \mathbf{N} \mathbf{u}(k) - \mathbf{M}_E \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{N}_E \mathbf{u}(k) - \mathbf{L} \mathbf{y}(k) =\tag{33}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \Delta \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{bmatrix} = \\
&= (\mathbf{M} - \mathbf{M}_E - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{x}(k) + (\mathbf{N} - \mathbf{N}_E - \mathbf{L}\mathbf{D})\mathbf{u}(k) + \mathbf{M}_E \Delta \mathbf{x}(k)
\end{aligned} \tag{34}$$

Hlavním požadavkem na průběh estimačního procesu je, aby chyba estimace konvergovala s rostoucím krokem  $k$  k nule (přesný odhad), a aby nebyl ovlivněn momentálním stavem systému  $\mathbf{x}(k)$ , ani jeho buzením  $\mathbf{u}(k)$ . Odtud

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} - \mathbf{M}_E - \mathbf{L}\mathbf{C} &= \mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{M}_E = \mathbf{M} - \mathbf{L}\mathbf{C} \\
\mathbf{N} - \mathbf{N}_E - \mathbf{L}\mathbf{D} &= \mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{N}_E = \mathbf{N} - \mathbf{L}\mathbf{D}
\end{aligned} \tag{35}$$

potom

$$\Delta \mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{M}_E \Delta \mathbf{x}(k) \tag{36}$$

Dynamika estimačního procesu je pak dána pouze maticí  $\mathbf{M}_E$ . Abychom zajistili konvergenci estimačního procesu, je nutné volit všechna její vlastní čísla ve stabilní oblasti, tedy pro diskrétní variantu uvnitř jednotkového kruhu.

$$\begin{aligned}
\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{M}_E) &= \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{L}\mathbf{C}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \\
\lambda_i: |\lambda_i| &< 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{37}$$

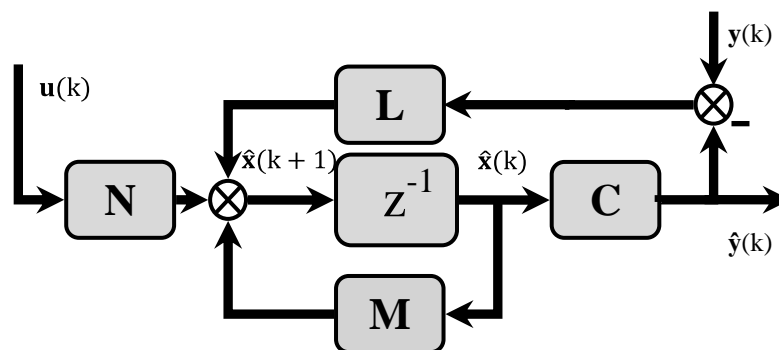
Speciálně pro konečný (a minimální) počet kroků estimačního procesu volíme jediné  $n$ -násobné nulové vlastní číslo v počátku (v centru stabilní oblasti). V tomto případě je matice  $\mathbf{M}_E$  nilpotentní, estimační proces končí po  $n$  krocích, po  $n$  krocích se odhad estimátoru přesně rovná skutečnému stavu.

$$\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) \tag{38}$$

Rozepsáním a po jednoduché úpravě lze ukázat, že dynamiku estimátoru je možné chápat jako dynamiku paralelního modelu regulované soustavy s korekcí odvozené od rozdílu skutečné hodnoty výstupu regulované soustavy a jejího odhadu

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{x}(k + 1) &= \mathbf{M}_E \Delta \mathbf{x}(k) \\
\mathbf{x}(k + 1) - \hat{\mathbf{x}}(k + 1) &= \mathbf{M}_E [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] \\
\hat{\mathbf{x}}(k + 1) &= \mathbf{x}(k + 1) - \mathbf{M}_E [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{M}_E = \mathbf{M} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} = \\
&= \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k) - \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x}(k) - \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}[\mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \cancel{\mathbf{D}\mathbf{u}(k)} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) - \cancel{\mathbf{D}\mathbf{u}(k)}] = \\
&= \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}[\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)]
\end{aligned} \tag{39}$$

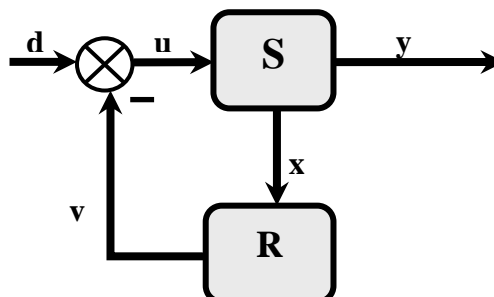


Obr. 7: Struktura diskrétního estimátoru

Návrh estimátoru podle (37) je jednoznačný pro SISO systémy. Pro MIMO systémy s  $r$  výstupy však matice  $\mathbf{L}$  již není tvořena  $n$  prvky sloupcového vektoru, ale je maticí obdélníkovou s  $n$  řádky a  $r$  sloupci, tedy s  $nr$  prvků. Úloha umístění  $n$  vlastních čísel do stabilní oblasti volbou matice  $\mathbf{L}$  již není v tomto případě jednoznačná a lze ji splnit několika způsoby.

## 1.4 Regulační obvod se stavovým regulátorem

Je-li dynamický systém řiditelný, existuje vždy jistá budicí funkce  $\mathbf{u}(t)$ , resp.  $\mathbf{u}(k)$ , která převede tento systém z libovolného stavu do libovolného stavu jiného. K určení této budicí funkce je však nutná úplná informace o momentálním rozvážení systému. Jinými slovy, znalost všech složek stavového vektoru, který toto rozvážení jednoznačně popisuje. Vytvoření vhodné budicí funkce je úkolem stavového regulátoru zapojeného do zpětné vazby regulačního obvodu. Vytváří ji jako vhodnou lineární kombinaci všech složek stavového vektoru.



Obr. 8: Struktura regulačního obvodu

Stavové regulátory jsou téměř výhradně realizovány díky své relativně komplikované struktuře jako diskrétní. Jsou zpravidla součástí softwarové realizace řídicích algoritmů specializovaného řídicího počítače ve zpětné vazbě. Budeme se proto dále zabývat pouze diskrétní variantou stavové regulace.

Stavový popis regulačního obvodu s diskrétním regulátorem

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}: \quad & \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k) \\
 & \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \\
 \mathbf{R}: \quad & \mathbf{v}(k) = \mathbf{R}\mathbf{x}(k) \\
 & \mathbf{u}(k) = \mathbf{d}(k) - \mathbf{v}(k)
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}[\mathbf{d}(k) - \mathbf{v}(k)] = [\mathbf{M} - \mathbf{NR}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{Nd}(k) \\
 \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}[\mathbf{d}(k) - \mathbf{v}(k)] = [\mathbf{C} - \mathbf{DR}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{Dd}(k)
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\boxed{\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{M} - \mathbf{NR}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{Nd}(k)} \tag{42}$$

$$\boxed{\mathbf{y}(k) = [\mathbf{C} - \mathbf{DR}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{Dd}(k)}$$

Sledujme vývoj stavového vektoru regulované soustavy s počátečním nenulovým rozvážením  $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ , bez vnějšího působení  $\mathbf{d}(k) = \mathbf{0}$

$$\mathbf{d}(k) = \mathbf{0}; \mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}(1) = (\mathbf{M} - \mathbf{NR})\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = (\mathbf{M} - \mathbf{NR})^2\mathbf{x}(0) \tag{43}$$

$\vdots$

$$\mathbf{x}(n) = (\mathbf{M} - \mathbf{NR})^n\mathbf{x}(0)$$

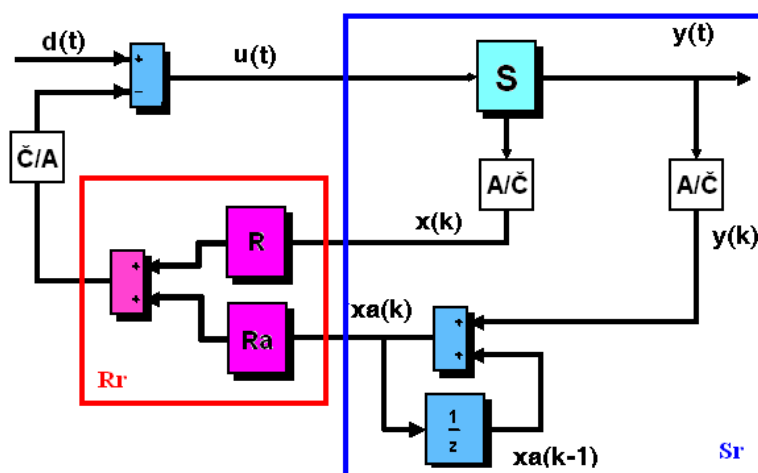
Stabilitu procesu zajišťuje takový stavový regulátor  $\mathbf{R}$ , pro který matice dynamiky uzavřeného obvodu  $(\mathbf{M} - \mathbf{NR})$  má všechna vlastní čísla ve stabilní oblasti (pro diskretní obvod vnitřek jednotkového kruhu). Úloha umístění těchto vlastních čísel volbou regulátoru  $\mathbf{R}$  je pro SISO systémy jednoznačná ( $n$  vlastních čísel,  $n$  prvků matice  $\mathbf{R}$ ), pro systémy MIMO víceznačná.

U diskretních regulačních obvodů existuje taková volba regulátoru  $\mathbf{R}$ , aby vliv počátečního rozvážení byl zcela eliminován již po  $n$  krocích (řízení v konečném a minimálním počtu kroků). Regulátor je navržen v tomto případě tak, že matice  $(\mathbf{M} - \mathbf{NR})$  je nilpotentní, tedy všechna její vlastní čísla jsou nulová.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= (\mathbf{M} - \mathbf{NR})^n = 0 \\ \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{x}(n+2) = \dots = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

#### 1.4.1 Regulační obvod s astatickým členem

Nevýhodou výše popsaného stavového regulačního obvodu je, že nedokáže zcela eliminovat vliv vnější poruchy. Analogicky, jako v klasickém regulačním obvodu s proporcionálním regulátorem, i zde zůstává po odeznění přechodového děje trvalá regulační odchylka. Zavedení astatického členu do obvodu regulované veličiny tento jev eliminuje.



Obr. 9: Struktura regulačního obvodu s astatickou složkou

$R_r$  ... rozšířená struktura regulátoru,  $S_r$  ... rozšířená dynamika regulované soustavy

Uměle zavedený astatický člen chápeme jako součást regulované soustavy. Její dynamiku rozšiřuje, zvyšuje její řád. Omezme se v dalším pro jednoduchost pouze na regulované soustavy ryze dynamické, pro které je  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ . V opačném případě bychom museli vznik algebraické smyčky obvodu ošetřit speciálním způsobem (ošetřit kauzalitu okamžiku snímání  $\mathbf{x}(k)$ ,  $\mathbf{y}(k)$  a výpočtu akční veličiny  $\mathbf{u}(k)$  ).

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{x}_a(k) = \mathbf{y}(k) + \mathbf{x}_a(k-1)$$

$$\mathbf{x}_a(k+1) = \mathbf{y}(k+1) + \mathbf{x}_a(k) = \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{N}\mathbf{u}(k) + \mathbf{x}_a(k) \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}_a(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{M} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_a(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{C}\mathbf{N} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

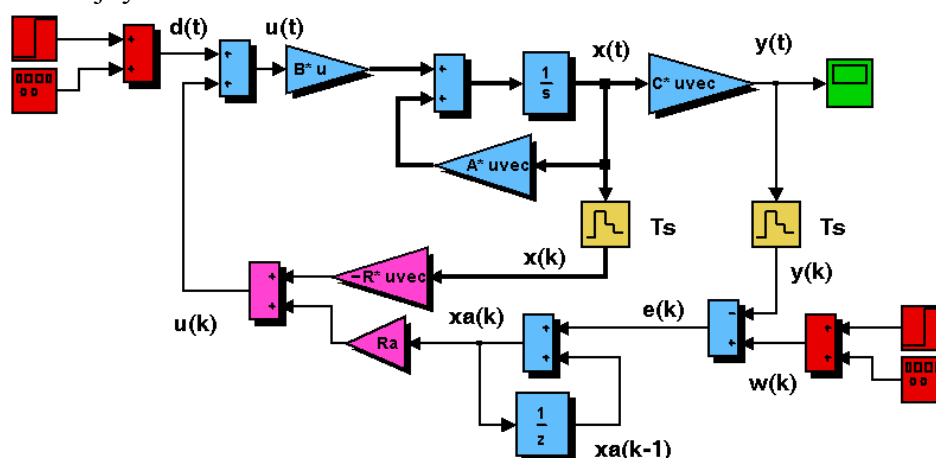
$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_a(k) \end{bmatrix}$$

Stavový popis rozšířené dynamiky regulované soustavy nabývá tedy tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r(k+1) &= \mathbf{M}_r \mathbf{x}_r(k) + \mathbf{N}_r \mathbf{u}(k), \quad \mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{M} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{C}\mathbf{N} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(k), \quad \mathbf{C}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

$\mathbf{x}_r$  ... rozšířený stavový vektor o astatickou stavovou složku

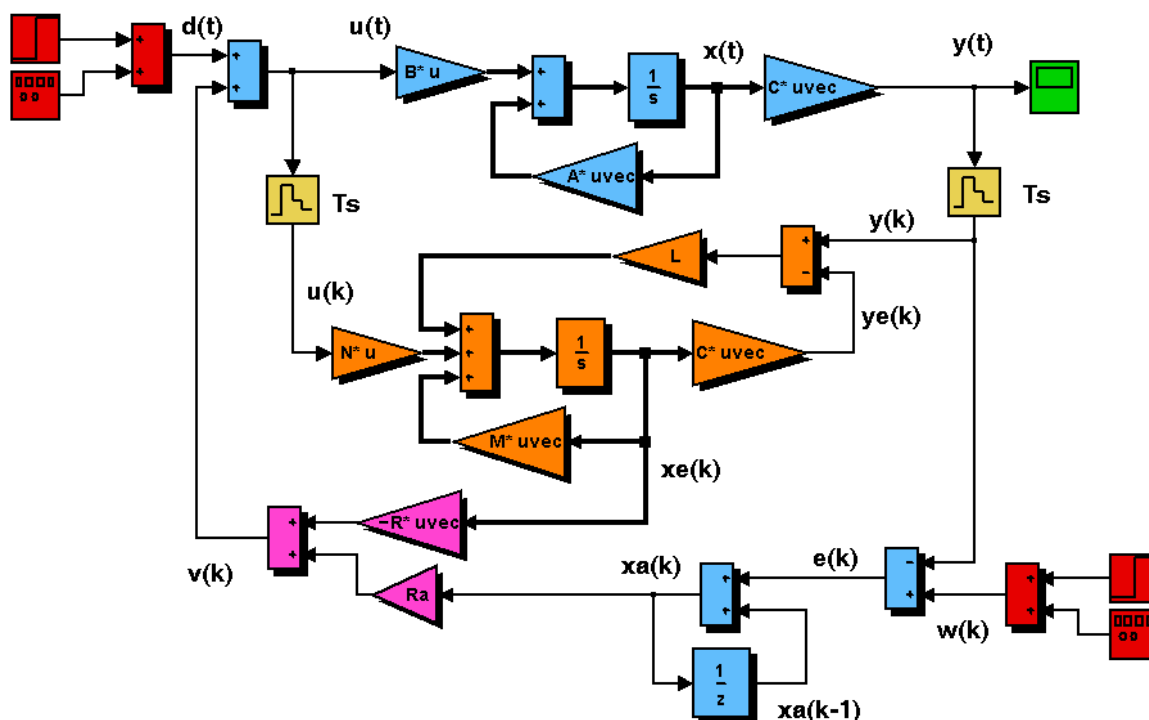
Pozn.: Popsaná varianta zavedení astatického členu do regulační smyčky stavového regulátoru je přímou analogií zavedení integrační složky klasického regulátoru se stejným motivem i důsledkem.



Obr.10 : Simulační model regulačního obvodu SISO systému s astatickým členem, sezavedenou regulační odchylkou a poruchou na vstupu do regulované soustavy



Nejsou-li složky stavového vektoru měřitelné, použijeme k jejich odhadu estimátor.



Obr.11 : Simulační model stejného regulačního obvodu s estimací stavu

## 1.5 Metody návrhu regulátoru

Návrhem regulátoru ve zpětné vazbě (tzv. syntézou obvodu) můžeme zásadním způsobem ovlivnit chování regulačního obvodu a kvalitu regulačních pochodů. Existuje několik metod návrhu stavového regulátoru, zde se budeme zabývat pouze dvěma základními deterministickými přístupy, metodou umístění pólů přenosu uzavřeného obvodu (anglicky „poles placement“) a metodou minimalizace kvadratického kritéria.

Teoreticky lze návrhem stavového regulátoru ve zpětné vazbě měnit dynamiku uzavřeného obvodu libovolným (!) způsobem, viz (42), v tom smyslu, že n parametry regulátoru lze libovolně měnit polohu n vlastních čísel matice dynamiky uzavřeného regulačního obvodu  $M_r - N_r R_r$ . Prakticky jsme však omezeni technickými možnostmi reálných převodníků a akčních členů, rozsahy použitelných signálů, omezením předpokládaného lineárního popisu a také tzv. robustností obvodu.

Robustností v teorii řízení rozumíme citlivost regulačního obvodu na nepřesnost předpokládaného matematického modelu, na odchylku mezi jeho dynamickým chováním a chováním skutečné reálné soustavy. Je to obecně známé slabé místo stavové regulace. Problém je způsoben tím, že s rostoucími požadavky na kvalitu regulace, zejména na rychlost regulačních pochodů, extrémně rychle rostou nároky na přesnost matematického modelu, který v návrhu používáme. Výběrem metody návrhu regulátoru spolu s délkou regulačního kroku můžeme teoreticky libovolně zkracovat délku regulačního pochodu, a hrozí tak fatální kolize s robustností. Může dojít velmi snadno i ke zhroucení reálné regulace. Naopak, zklidnění a rozumné zpomalení regulačního pochodu vede obvykle k jeho větší robustnosti.

Přirozený požadavek nulové trvalé regulační odchylky zajistíme návrhem stavového regulátoru s respektováním rozšířené dynamiky regulované soustavy o astatický člen podle kap. 1.4.1. Popsaným rozšířením jsme zajistili potřebný astatický charakter uzavřené regulační smyčky.

Zajímavým, ne zcela evidentním faktem je, že návrhem stavového regulátoru ovlivňujeme pouze jmenovatel obrazového přenosu celého obvodu, jeho čítenel na volbě regulátoru vůbec nezávisí.

### **1.5.1 Metoda umístění pólů přenosu uzavřeného obvodu**

Metodika, známá pod anglickým označením „poles placement“, je založena na volbě rozložení vlastních čísel systémové matice ( $\mathbf{M}_r - \mathbf{N}_r \mathbf{R}_r$ ) uzavřeného obvodu (tedy kořenů jeho charakteristické rovnice, tzv. pólů přenosu) v Gaussově rovině. Jejich polohou implicitně volíme dynamiku obvodu, zda jsou výsledné regulační pochody rychlé či pomalé, aperiodické či s kmitavými složkami, nebo dokonce stabilní či nestabilní. Libovolnou polohu  $n$  vlastních čísel matice můžeme skutečně  $n$ -tíci nezávislých koeficientů regulátoru  $\mathbf{R}$  u SISO systémů jednoznačně zajistit (u MIMO systémů dokonce několika způsoby).

Extrémním případem je volba nulových všech vlastních čísel matice v samém centru stabilní oblasti. Tato volba vede k extrémně silné zpětné vazbě realizované „tvrdým“ regulátorem. Regulační pochod končí v nejkratším možném čase po  $n$  krocích (kde  $n$  je řád systému). Označujeme tuto volbu jako návrh regulátoru pracujícího

v konečném (a minimálním) počtu regulačních kroků (anglické označení obvykle „dead beat“). Je to zároveň jediná volba, kdy regulační pochody končí v konečném čase, v každém jiném případě jsou buď asymptoticky stabilní, teoreticky se uklidňují nekonečně dlouho, nebo jsou nestabilní.

Sledujme vývoj stavového vektoru v jednotlivých krocích

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_r(0) &\neq 0, \quad \mathbf{x}_r(k+1) = \mathbf{M}_r \mathbf{x}_r(k) + \mathbf{N}_r \mathbf{u}(k) \\
\mathbf{x}_r(1) &= \mathbf{M}_r \mathbf{x}_r(0) + \mathbf{N}_r \mathbf{u}(0) \\
\mathbf{x}_r(2) &= \mathbf{M}_r \mathbf{x}_r(1) + \mathbf{N}_r \mathbf{u}(1) = \mathbf{M}_r [\mathbf{M}_r \mathbf{x}_r(0) + \mathbf{N}_r \mathbf{u}(0)] + \mathbf{N}_r \mathbf{u}(1) = \\
&= \mathbf{M}_r^2 \mathbf{x}_r(0) + \mathbf{M}_r \mathbf{N}_r \mathbf{u}(0) + \mathbf{N}_r \mathbf{u}(1) \\
\mathbf{x}_r(3) &= \dots \mathbf{M}_r^3 \mathbf{x}_r(0) + \mathbf{M}_r^2 \mathbf{N}_r \mathbf{u}(0) + \mathbf{M}_r \mathbf{N}_r \mathbf{u}(1) + \mathbf{N}_r \mathbf{u}(2) \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_r(n) &= \mathbf{M}_r^n \mathbf{x}_r(0) + \mathbf{M}_r^{n-1} \mathbf{N}_r \mathbf{u}(0) + \mathbf{M}_r^{n-2} \mathbf{N}_r \mathbf{u}(1) + \dots + \mathbf{M}_r \mathbf{N}_r \mathbf{u}(n-2) + \\
&\quad + \mathbf{N}_r \mathbf{u}(n-1) = \mathbf{M}_r^n \mathbf{x}_r(0) + \underbrace{[\mathbf{N}_r, \mathbf{M}_r \mathbf{N}_r, \dots, \mathbf{M}_r^{n-1} \mathbf{N}_r]}_{\mathbf{G} \dots \text{matice řiditelnosti}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(n-1) \\ \mathbf{u}(n-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{47}$$

Speciálně, jestli se jedná o SISO systém a návrh řízení v konečném počtu kroků regulace

$$\mathbf{M}_r^n \mathbf{x}_r(0) + \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(n-1) \\ \mathbf{u}(n-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} = 0 \tag{49}$$

Je-li systém řiditelný, matice  $\mathbf{G}$  je regulární a můžeme jednoduše vyjádřit celou sekvenci akční veličiny v jednotlivých krocích pochodu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(n-1) \\ \mathbf{u}(n-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} = -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{M}_r^n \mathbf{x}_r(0) \tag{50}$$

Jestliže separujeme  $u(0)$

$$u(0) = -[0, \dots, 0, 1] \mathbf{G}^{-1} \mathbf{M}_r^n \mathbf{x}_r(0) = \mathbf{R}_r \mathbf{x}_r(0) \quad (51)$$

dostáváme jednoduché vyjádření hledané matice regulátoru

$$\mathbf{R}_r = -[0, \dots, 0, 1] \mathbf{G}^{-1} \mathbf{M}_r^n \quad (52)$$

V obecném případě, tzv. Ackermannova formule

$$\Delta(\mathbf{M}_r) = \mathbf{M}_r^n + a_{n-1} \mathbf{M}_r^{n-1} + \dots + a_0 \mathbf{E} \quad (53)$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (54)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – volíme

$$\mathbf{R}_r = -[0, \dots, 0, 1] \mathbf{G}^{-1} \Delta(\mathbf{M}_r) \quad (55)$$

Pro MIMO systémy

$$\mathbf{R}_r = -[\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{E}] \mathbf{G}^{*-1} \Delta(\mathbf{M}_r) \quad (56)$$

$\mathbf{G}$  ... obecně není čtvercová

$\mathbf{G}^{*-1}$  ... čtvercová matice získaná výběrem  $n$  lineárně nezávislých sloupců matice  $\mathbf{G}$

Řešení není v tomto případě jednoznačné. Konečný počet kroků regulace se dá zajistit různými způsoby.

**Příklad.:** Uvažujme stavové matice SISO regulované soustavy

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,845 & 0,239 \\ -0,477 & 0,129 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0,077 \\ 0,239 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0]$$

stavové matice rozšířené dynamiky

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{M} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,845 & 0,239 & 0 \\ -0,477 & 0,129 & 0 \\ 0,845 & 0,239 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{C}\mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,077 \\ 0,239 \\ 0,077 \end{bmatrix}$$

matice řiditelnosti

$$\mathbf{G} = [\mathbf{N}_r \quad \mathbf{M}_r \mathbf{N}_r \quad \mathbf{M}_r^2 \mathbf{N}_r] = \dots = \begin{bmatrix} 0,077 & 0,122 & 0,102 \\ 0,239 & -0,006 & -0,059 \\ 0,077 & 0,200 & 0,302 \end{bmatrix}$$

zvolme např. vlastní čísla systémové matice uzavřeného obvodu

$$\lambda_1 = 0,1 \quad , \quad \lambda_2 = 0,3 \quad , \quad \lambda_3 = 0,5$$

charakteristický polynom

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = (\lambda - 0,1)(\lambda - 0,3)(\lambda - 0,5) = \\ &= \lambda^3 - 0,9\lambda^2 + 0,23\lambda - 0,015 \end{aligned}$$

$$\Delta(\mathbf{M}_r) = \mathbf{M}_r^3 - 0,9\mathbf{M}_r^2 + 0,23\mathbf{M}_r - 0,015\mathbf{E} = \dots = \begin{bmatrix} 0,035 & 0,019 & 0 \\ -0,038 & -0,021 & 0 \\ 0,735 & 0,276 & 0,315 \end{bmatrix}$$

matice regulátoru

$$\mathbf{R}_r = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{G}^{-1} \Delta(\mathbf{M}_r) = \dots = [-5,396 \quad -1,938 \quad -2,536]$$

Použijeme-li podporu Matlabu, můžeme pro výpočet regulátoru využít funkce „acker“

$$\mathbf{R}_r = -\text{acker}(\mathbf{M}_r, \mathbf{N}_r, [0.1 \ 0.3 \ 0.5])$$

Výsledky jsou shodným až na zaokrouhlovací chyby.

**Konec příkladu**

### 1.5.2 Nastavení regulátoru pomocí kvadratického kritéria

Kvadratické kritérium je velmi rozšířený osvědčený „klasický“ způsob vyjádření kritériálního ohodnocení kvality regulačního pochodu. Patří do třídy tzv. integrálních kritérií, které pro diskrétně pracující regulační obvody je nahrazeno součtem kvadrátů regulované a akční veličiny. Pro stavové regulační obvody je obecně rozšířeno i o penalizaci všech složek stavového vektoru. Kvalita regulačního pochodu bývá často posuzována pouze na konečném kritériálním časovém intervalu (tzv. horizontu řízení), na kterém dojde k praktickému ustálení reakce obvodu. Obecný tvar kvadratického kritéria lze psát ve tvaru

$$J = \sum_{j=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(j) \mathbf{Q} \mathbf{x}(j) + \mathbf{u}^T(j) \mathbf{P} \mathbf{u}(j)] + \mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) \rightarrow \min. \quad (57)$$

**Q, P, S** ... váhové, pozitivně definitní matice

N ... horizont řízení

Analytické vyjádření a optimalizace tohoto kritéria bylo historicky podmíněno vytvořením a rozpracováním matematických metod této optimalizace. V tomto případě úloha vede na aplikaci Bellmanova dynamického programování a finálně k rekurzivnímu řešení Riccatiho rovnice.

Pro návrh regulátoru podle kvadratického kritéria v prostředí Matlab máme k dispozici standardní funkci „dlqr“, která úlohu řeší ještě podle poněkud obecnějšího kritéria

$$J = \sum_{j=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(j) \mathbf{Q} \mathbf{x}(j) + \mathbf{u}^T(j) \mathbf{P} \mathbf{u}(j) + 2 * \mathbf{x}^T(j) \mathbf{N} \mathbf{u}(j)] \rightarrow \min. \quad (58)$$

Matice **P** má pro systémy typu SISO pouze jeden řádek a jeden sloupec, je tedy skalárem. Pro návrh regulátoru podle kvadratického kritéria máme k dispozici trojici váhových pozitivně definitních matic **Q**, **P**, **N**, kterými lze ovlivnit rychlost a kvalitu regulačních pochodů.

Na příklad pro regulační obvod s rozšířenou dynamikou podle předcházejícího příkladu a konstrukci kvadratického kritéria

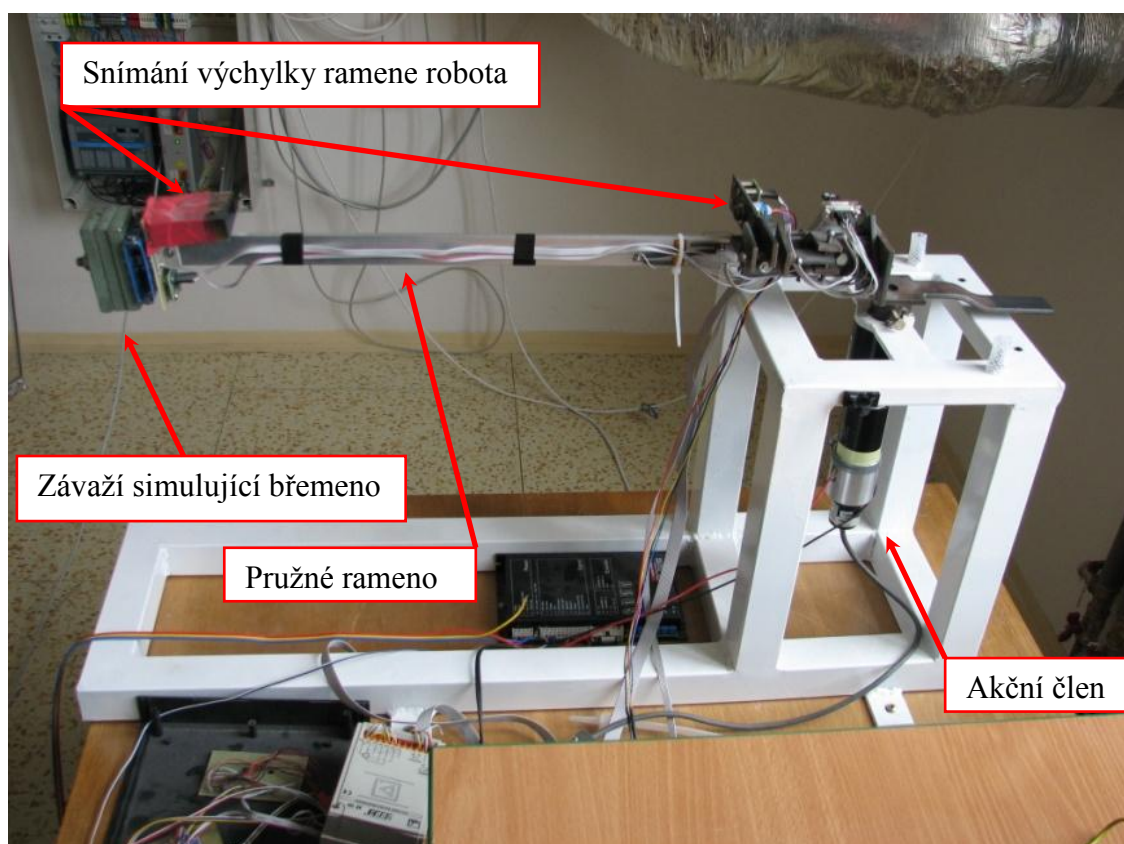
$$J = \sum_{j=0}^{\infty} [(y(j) - w(j))^2 + 0,5u(j)^2] \Rightarrow \min.$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad P=0,5 ; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2 Aplikace stavové regulace na reálném laboratorním modelu

Pro ověřování chování a vlastností stavového regulačního obvodu byl využit reálný laboratorní model pružného ramene robota. Tento model vznikl v rámci disertační práce Ing. Radka Srba, včetně ovládacích a měřicích prvků. Hlavním cílem bylo ověřit možnosti eliminace kmitání koncového bodu subtilního ramene a nahradit regulací jeho pohybu zbytečně hmotnou klasickou konstrukci s cílem optimalizovat energetické nároky se zachováním vysokých pracovních rychlostí. Poloha koncového bodu ramene je odvozena od polohy hřídele ovládacího servopohonu s korekcí výchylky odvozené od projekce laserového paprsku dopadajícího na matici fotočivných prvků umístěné na konci ramene.

Na modelu bylo provedeno několik měření dynamiky této regulované soustavy v několika variantách daných různým zatížením koncového bodu ramene. Byla vždy naměřena reakce systému z klidu na skokovou změnu polohy natočení hřídele akčního členu (přechodová charakteristika). Následnou identifikací byl ve všech případech získán matematický model, který nám sloužil k experimentálnímu ověřování příslušných regulačních pochodů v simulačním prostředí.



Obr. 12: Reálný laboratorní model

## 2.1 Identifikace dynamického systému

Na laboratorním modelu byly provedeny čtyři základní měření přechodových charakteristik: nezatíženého ramene, s jedním, dvěma, a třemi stejně hmotnými závažími umístěnými na jeho konci. Dynamiky těchto čtyř variant následně posloužily k ověřování robustnosti regulačního obvodu. Závaží charakterizovala různé hmotnosti břemene ovládaného ramenem robota.

Pro identifikaci dynamiky byla ve všech případech zvolena rekurzivní iterační metoda v prostředí Matlab-Simulink. Byly identifikovány koeficienty obrazového přenosu všech uvedených variant  $F_0(s)$ ,  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $F_3(s)$ , kde  $F_i(s)$  ... rameno s  $i$  závažími na jeho konci.

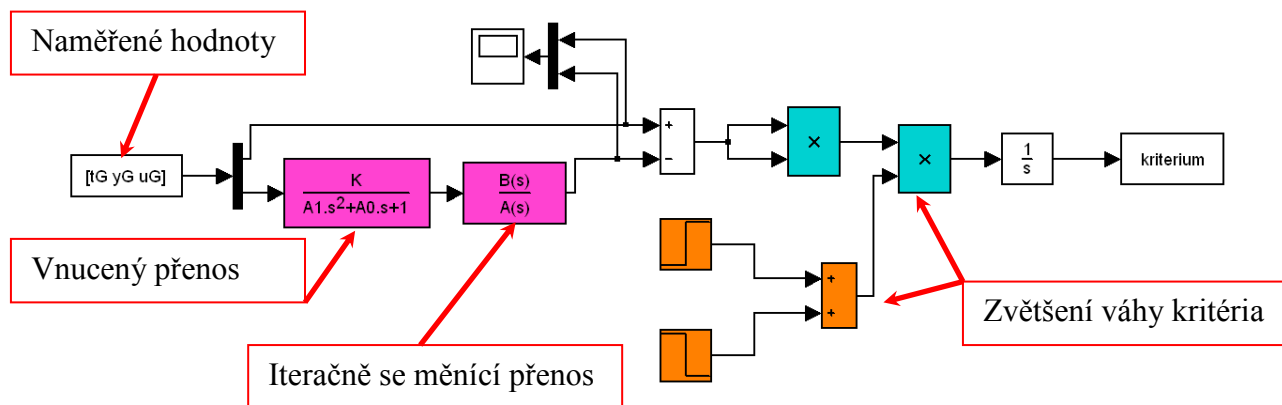
Postupně byl zvyšován odhad řádu aproximačního přenosu a sledována kvalita výsledné aproximace. Jako dostačující řád aproximačního přenosu byl ve všech případech zvolen řád pátý. Na průběhu přechodové charakteristiky byla patrna vždy jedna dominantní vlastní frekvence ramene, která byla po odečtení fixována v aproximačním přenosu.

Pro určování kvality identifikovaných parametrů bylo využito modifikované kvadratické kritérium aplikované na časovém intervalu daném praktickým ustálením naměřené přechodové charakteristiky (2,5s). Jako metrika kvality byl zvolen integrál kvadrátu rozdílu pořadnic naměřené a aproximační přechodové charakteristiky s trojnásobnou vahou na intervalu 0,3 až 0,6 sec. Záměrem této modifikace bylo zvýšení věrohodnosti aproximace na kritickém úseku náběhu přechodové charakteristiky.

Podstatou identifikační metody je opakovaná simulace přechodové charakteristiky aproximačního přenosu s postupně se měnícími koeficienty, srovnání s naměřeným průběhem reálného systému a výpočet kritériálního ohodnocení v každém cyklu výpočtu. Výpočet je řízen centrálním skriptem (tzv. m-file) jehož hlavní částí je standardní procedura numerické optimalizace simplexovou metodou realizovaná funkcí „fminsearch“. Tato procedura rekurzivně hledá minimum účelové funkce, jejíž pořadnice jsou určeny naznačenou simulací. Strategie postupných změn koeficientů je určena strategií použité simplexové metody.

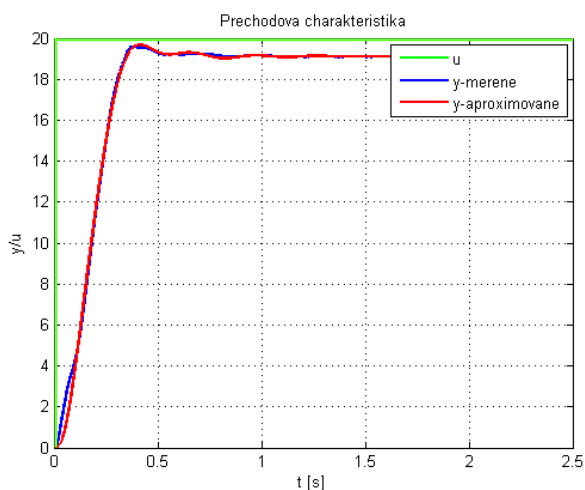
Na Obr. 13 je uvedeno simulační schéma pro identifikaci systému s výpočtem kritériálního ohodnocení.



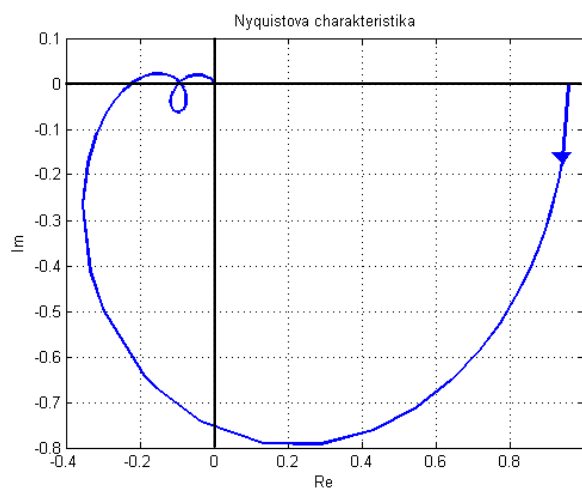


Obr. 13: Schéma zapojení pro identifikaci

Výsledný průběh naměřené a identifikované charakteristiky přenosu  $F_3(s)$  po cca 350 iteračních krocích viz Obr.14



Obr. 14: Identifikace naměřené soustavy  $F_3$



Obr. 15: Nyquistova charakteristika systému  $F_3$

Na Obr.15 je pro zajímavost uvedena i frekvenční charakteristika přenosu  $F_3(s)$ . Smyčka frekvenční charakteristiky na vyšších frekvencích je způsobena naidentifikovanými nulami přenosové funkce  $F_3(s)$ .

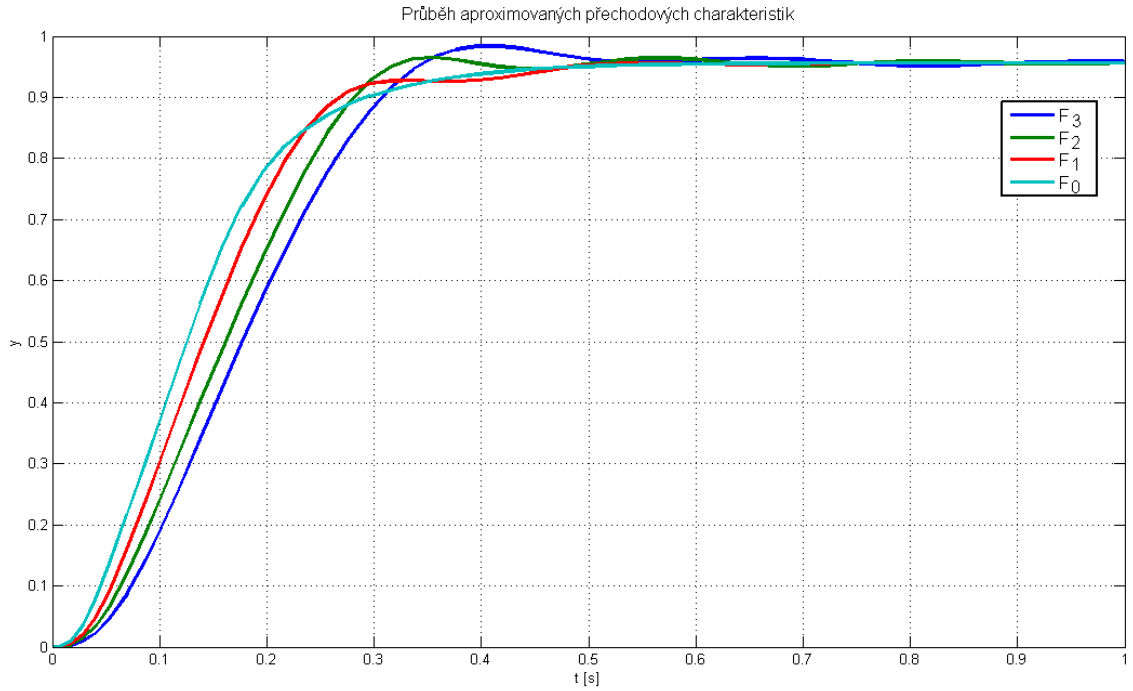
Výsledné přenosy všech uvažovaných variant

$$F_3(s) = \frac{0.0021 s^2 + 0.0046 s + 0.9562}{6.556 \cdot 10^{-7} s^5 + 2.9 \cdot 10^{-5} s^4 + 0.0008076 s^3 + 0.01581 s^2 + 0.1773 s + 1} \quad (59)$$

$$F_2(s) = \frac{0.00155 s^2 + 0.00104 s + 0.9562}{3.001 \cdot 10^{-7} s^5 + 1.528 \cdot 10^{-5} s^4 + 0.000526 s^3 + 0.01187 s^2 + 0.1612 s + 1} \quad (60)$$

$$F_1(s) = \frac{0.00121 s^2 + 0.00668 s + 0.9562}{1.471 \cdot 10^{-7} s^5 + 9.622 \cdot 10^{-6} s^4 + 0.0004076 s^3 + 0.00957 s^2 + 0.1557 s + 1} \quad (61)$$

$$F_0(s) = \frac{0.00055 s^2 + 0.00791 s + 0.9562}{3.46e \cdot 10^{-8} s^5 + 2.955 \cdot 10^{-6} s^4 + 0.000210 s^3 + 0.00711 s^2 + 0.1457 s + 1} \quad (62)$$



Obr. 16: *Průběh aproximovaných přechodových charakteristik*

## 2.2 Aspekty neovlivňující chování regulačního obvodu

### 2.2.1 Stavová reprezentace regulované soustavy

Přenosovou funkci regulačního obvodu se stavovým regulátorem lze vyjádřit vztahem, viz. (11), (42)

$$\mathbf{F}_{yd}(z) = (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{R})(z\mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{N}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{N} + \mathbf{D} \quad (63)$$

Transformujeme-li stavové vyjádření regulované soustavy formálně do jiného tvaru, viz (23)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k) &= \mathbf{T} \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k) \\
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{M} \mathbf{x}(k) + \mathbf{N} \mathbf{u}(k) \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{u}(k) \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \quad \rightarrow \quad \mathbf{y}(k) = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \quad (64) \\
\tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T} \quad , \quad \tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{N} \quad , \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T} \\
\mathbf{u}(k) &= \mathbf{R} \mathbf{x}(k) = \mathbf{R} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{x}}(k) = \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{x}}(k)
\end{aligned}$$

Přenosová funkce uzavřeného obvodu je vyjádřena

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{\text{yd}}(z) &= (\tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{R}}) (z \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{R}})^{-1} \tilde{\mathbf{N}} + \mathbf{D} = \\
&= (\mathbf{C} \mathbf{T} - \mathbf{D} \mathbf{R} \mathbf{T}) (z \mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{R} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{N} + \mathbf{D} = \\
&= (\mathbf{C} - \mathbf{D} \mathbf{R}) \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} (z \mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{N} + \mathbf{D} = \\
&= (\mathbf{C} - \mathbf{D} \mathbf{R}) (z \mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{N} + \mathbf{D} = \mathbf{F}_{\text{yd}}(z) \quad (65)
\end{aligned}$$

Transformací stavového popisu regulované soustavy je tedy transformován pouze přenos regulátoru

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \mathbf{T} \quad (66)$$

výsledný přenos celého uzavřeného obvodu je však zachován. Chování obvodu je invariantní vůči formě stavového popisu, jeho transformace je jen jinou formou vnitřního uspořádání, které se na vnějším chování neprojeví.

Tento závěr je potvrzen i simulací, regulační pochody regulačních obvodů lišících se stavovou reprezentací regulované soustavy jsou zcela identické.

### 2.2.2 Metodika návrhu regulátoru

Přenosová funkce uzavřeného SISO regulačního obvodu je vyjádřena vztahem

$$\mathbf{F}_{\text{yd}}(z) = \frac{\mathbf{B}(z)}{\mathbf{A}(z)} = \mathbf{C} (z \mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{N} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(z \mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{R})}{\det(z \mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{R})} \mathbf{N} \quad (67)$$

Lze ukázat zajímavou (a možná i překvapivou) skutečnost, že čitatel tohoto přenosu

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{C} \text{adj}(z \mathbf{E} - \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{R}) \mathbf{N} \quad (68)$$

nezávisí v obecném případě vůbec na parametrech regulátoru  $\mathbf{R}$ . Dynamika uzavřeného regulačního obvodu je proto jednoznačně určena pouze rozložením kořenů jmenovatele přenosu (charakteristického polynomu), tedy vlastních čísel jeho systémové matice  $(\mathbf{M} - \mathbf{NR})$ . Jejich rozložení v Gaussově rovině určujeme při návrhu regulátoru buď přímo řešením Ackermannovy formule (poles placement) nebo nepřímo prostřednictvím návrhu podle minima kvadratické regulační plochy (případně jinou metodikou).

Tuto ekvivalenci různými způsoby navrženého regulátoru demonstrujeme následujícím příkladem. Použijeme-li vlastní čísla systémové matice uzavřeného regulačního obvodu odpovídající regulátoru navrženému minimalizací kvadratického kritéria pro návrh regulátoru metodou umístění pólů, je výsledkem shodný přenos regulátoru i v tomto případě, a tedy i dynamika celého obvodu.

```
>> M=[0.8452 0.2387 0;-0.4773 0.1292 0;0.8452 0.2387 1];
```

```
N=[0.0774;0.2387;0.0774];
```

```
>> Q=[0 0 0;0 0 0;0 0 1];
```

```
*****
```

```
>> R=dlqr(M,N,Q,0.4)
```

```
R = 2.2843  0.8102  1.2392
```

```
*****
```

```
>> eig(M-N*R)
```

```
ans =
```

```
0.3424
```

```
0.5829 + 0.2459i
```

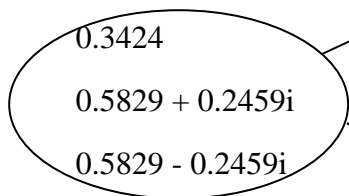
```
0.5829 - 0.2459i
```

```
*****
```

```
>> R=acker(M,N,[0.3424 0.5829+0.2459i 0.5829-0.2459i])
```

```
R = 2.2847  0.8103  1.2395
```

Vlastní čísla matice  $(\mathbf{M} - \mathbf{NR})$

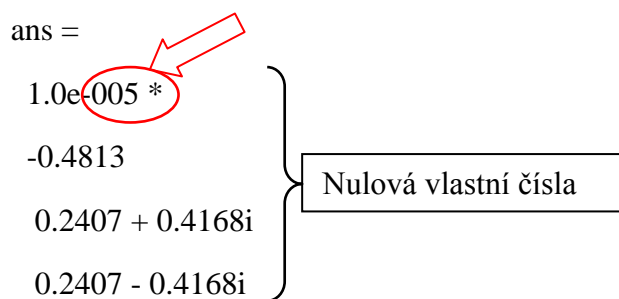


Chování regulačního obvodu samozřejmě závisí na navrženém regulátoru, nikoliv však na způsobu jak jsme ho navrhli.



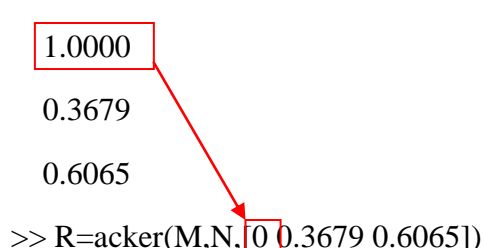
„Nejtvrdějším“ možným regulátorem je regulátor operující v konečném a minimálním počtu kroků regulace, který odpovídá volbě nulových všech vlastních čísel matice ( $\mathbf{M} - \mathbf{N}\mathbf{R}$ ).

```
>>> R=acker(M,N,[0 0 0])
R = 9.0768  2.7212  8.0400
>>> eig(M-N*R)
ans =
1.0e-005 *
-0.4813
0.2407 + 0.4168i
0.2407 - 0.4168i
```



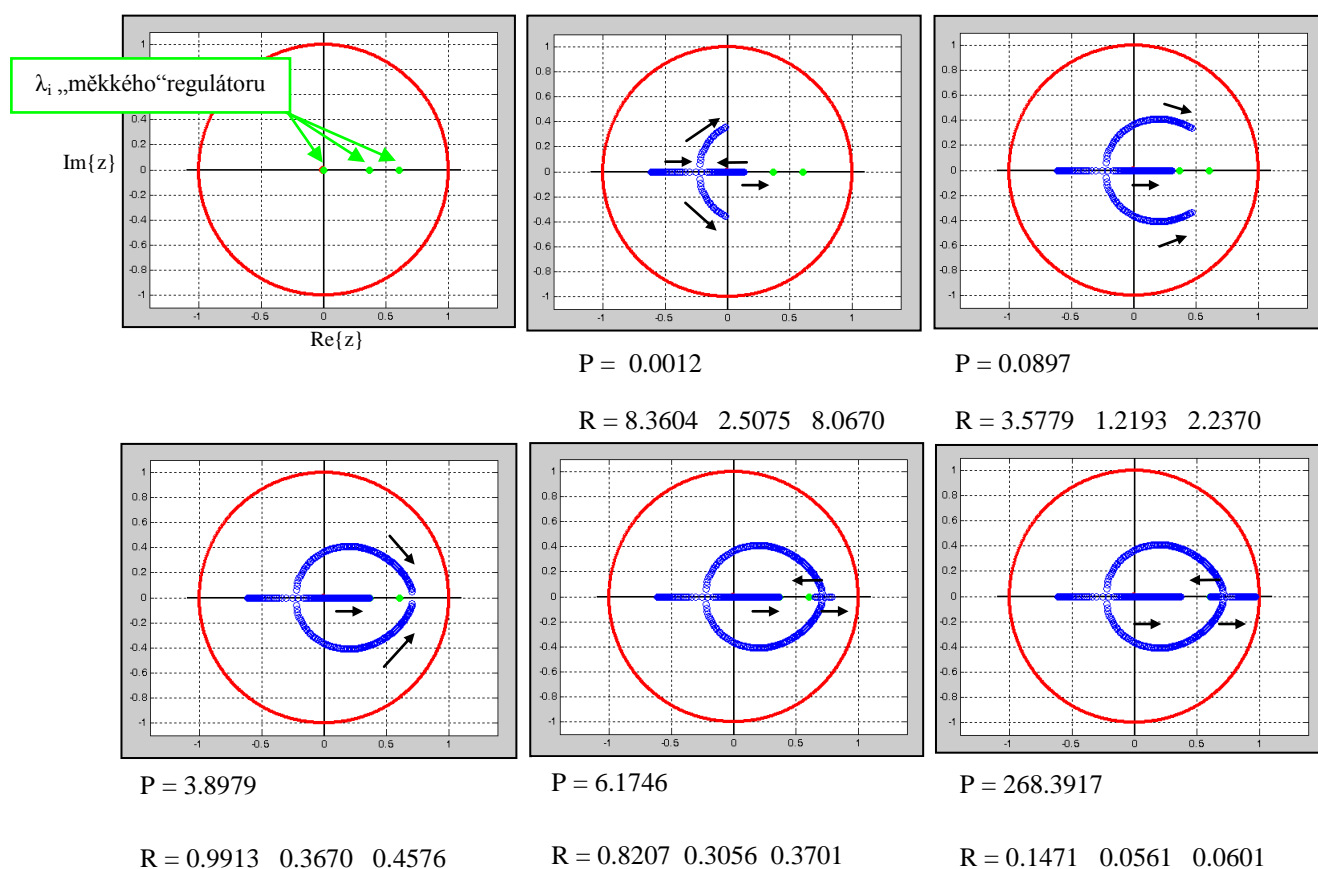
Naopak „nejměkčího“ regulátoru dosáhneme volbou vlastních čísel matice ( $\mathbf{M} - \mathbf{N}\mathbf{R}$ ) shodných s vlastními čísly matice  $\mathbf{M}$  s tím, že její vlastní číslo  $\lambda_1 = 1$  (které jsme získali rozšířením dynamiky obvodu o astatickou složku) nahradíme vlastním číslem nulovým. Přizpůsobíme tak dynamiku celého uzavřeného regulačního obvodu přesně přirozené dynamice regulované soustavy. Pokud bychom tuto záměnu neprovedli, dostaneme nutně regulátor nulový.

```
>>> eig(M)
ans =
1.0000
0.3679
0.6065
>>> R=acker(M,N,[0 0.3679 0.6065])
R = 5.0015  1.9192  1.9998
>>> eig(M-N*R)
ans =
-0.0000
0.3679
0.6065
```



Regulační pochod s takto navrženým regulátorem spočívá v jediném vhodném akčním zásahu (změně akční veličiny) na jeho začátku a následné volné reakci regulované soustavy bez jakýchkoliv korekčních zásahů v následujících krocích.

Použijeme-li pro návrh regulátoru metodu minimalizace kvadratické regulační plochy, potom s rostoucí kritériální vahou  $P$  na akční veličinu přechází navržený regulátor z jednoho extrému „tvrdého“ regulátoru ( pro  $P = 0$  ) plynule do druhé mezní situace „měkkého“ regulátoru ( pro  $P \rightarrow \infty$  ) přizpůsobeného přirozené dynamice regulované soustavy.

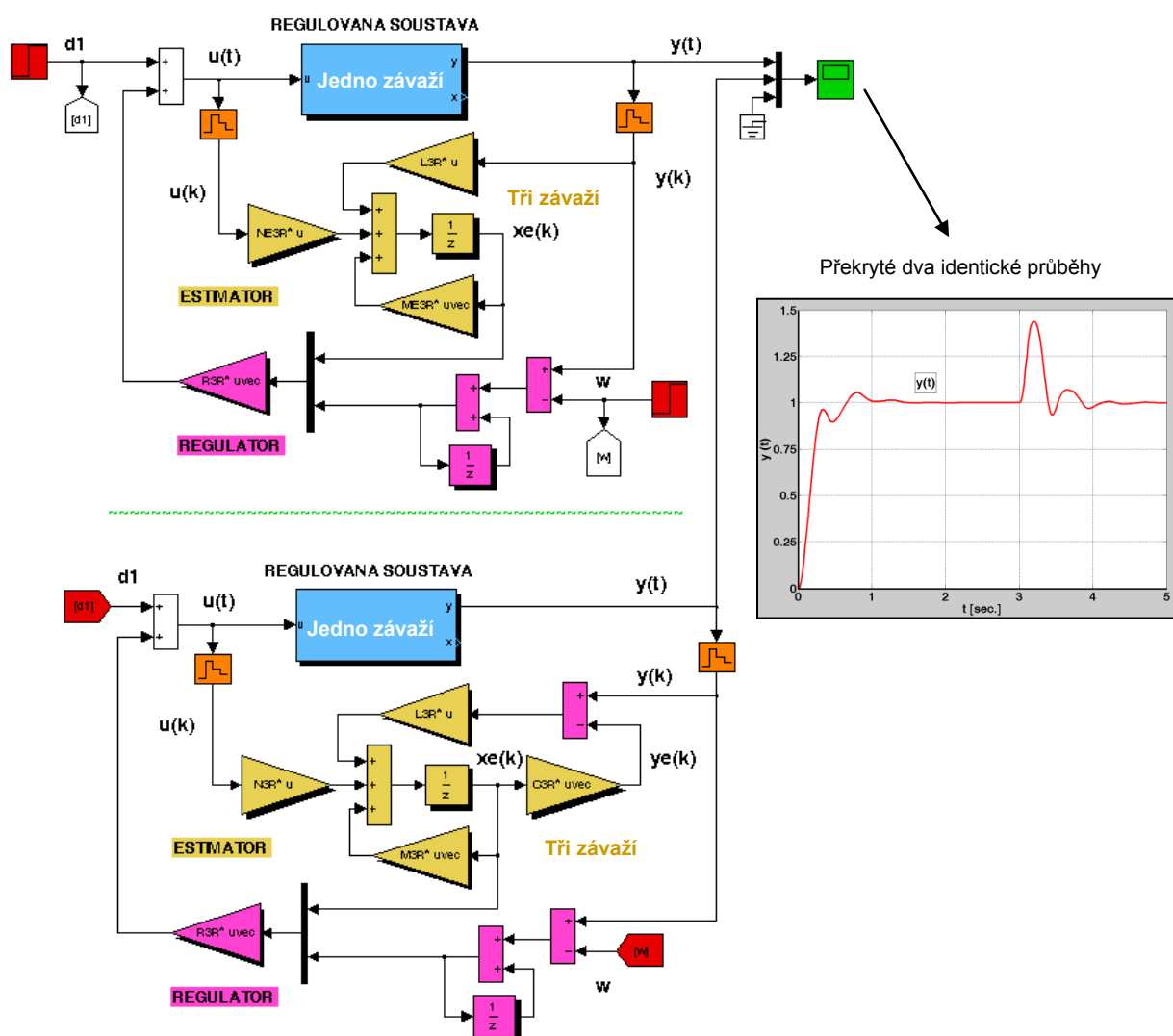


Obr. 17: Vývoj polohy vlastních čísel matice  $(\mathbf{M} - \mathbf{N}\mathbf{R})$  a regulátoru  $\mathbf{R}$  s rostoucí vahou  $P$  kvadratického kritéria v GKR

Povšimněme si, že s rostoucí vahou  $P$  kvadratického kritéria konvergují póly přenosu uzavřeného regulačního obvodu k pólům odpovídajícím extrémně „měkkému“ regulátoru přizpůsobenému dynamice regulované soustavy. S rostoucí vahou  $P$  se póly přenosu stávají reálnými na intervalu  $<0, +1>$ , regulační pochod se stává aperiodickým bez kmitavých složek, koeficienty regulátoru se zmenšují, síla zpětné vazby klesá.

### 2.2.3 Struktura použitého estimátoru

V kap. 1.3 byly popsány dvě strukturálně odlišné varianty estimátoru, jedna využívající odhadu regulované veličiny a srovnání s její skutečně naměřenou hodnotou, druhá varianta pracující pouze s odhadem stavového vektoru. Z odvození a rozboru uvedeném v této kapitole je zřejmé, že obě varianty jsou zcela ekvivalentní za předpokladu, že estimátor odhaduje stav soustavy s dynamikou, pro kterou byl navržen. Obecný teoretický důkaz ekvivalence obou variant i pro dynamicky odchýlený systém (tj. dynamika systému je odlišná od dynamiky, pro kterou byl estimátor navržen) je však složitější a v kap. 1.3 uveden není. Shodné chování obou variant estimátoru i v tomto případě však bylo simulačně ověřeno na relativně široké škále typických situací.



Obr. 18: Schéma regulačního obvodu s různými způsoby provedení estimátoru

Na předcházejícím obrázku je uvedeno simulační schéma dvou strukturálních variant estimátoru spolupracujících se stejnou regulovanou soustavou. Estimátor je navržen pro dynamiku odpovídající modelu robotického ramena zatíženého třemi závažími na jeho konci (referenční dynamika), regulovaná soustava však odpovídá dynamice ramene pouze s jedním závažím. Shoda obou reakcí se projevuje překrytím identických průběhů  $y(t)$  na stínítku zobrazovače. Obdobná shoda se prokázala i ve všech ostatních situacích.



## 2.3 Aspekty ovlivňující kvalitu regulace a robustnost regulačního obvodu

### 2.3.1 Normalizace stavového popisu

Nevyváženost stavového popisu de facto neovlivňuje teoreticky ani kvalitu, ani robustnost regulačního obvodu, ale projevuje se v reálné aplikaci významnou odchylkou chování skutečného obvodu od jeho chování teoretického.

Pokud byl navržen stavový regulátor vzhledem ke stavovému popisu regulované soustavy získané identifikací reálného modelu bez úpravy, vycházely koeficienty regulátoru bez ohledu na zvolenou metodu v nepříjemně velkém rozsahu, lišící se vzájemně o několik řádů.

Konkrétně pro regulátor navržený metodou minimalizace kvadratické regulační plochy s váhou 0,4 na akční veličinu a dynamiku ramene se třemi závažími jsme získali parametry regulátoru

$$\mathbf{R} = [ 0,823 \quad 0,277 \cdot 10^7 \quad 0,173 \cdot 10^6 \quad 0,128 \cdot 10^5 \quad 0,574 \cdot 10^3 \quad 0,189 \cdot 10^2 ]$$

Maximální hodnoty jednotlivých složek stavového vektoru v průběhu regulačního pochodu se však také inverzně vzájemně lišily ve stejném rozsahu až sedmi řádů. To vedlo při výpočtu akční veličiny v řídicím algoritmu regulátoru k násobení čísel odlišných až o 14 řádů. Vzhledem k technické realizaci regulátoru a zaokrouhlovacím chybám byl tento algoritmus nepříjemný. Zaokrouhlovací chyby při výpočtu se sníženou přesností zcela znehodnocovaly řídicí algoritmus a vedly k numerické nestabilitě celého obvodu. Tyto okolnosti byly příčinou velmi malé robustnosti regulační smyčky.

Jednoduchý princip odstranění tohoto nedostatku je normalizace euklidovské normy stavového vektoru regulované soustavy. Jednotlivé stavové složky normujeme prostým dělením jejich odhadnutou maximální hodnotou. Přizpůsobíme tak v podstatě jen jejich měřítkové faktory a normalizujeme bázi stavového vyjádření. Technicky toho dosáhneme jednoduchou lineární transformací původního stavového vyjádření. Tato úprava se pozitivně projevila v návrhu stavového regulátoru. Při stejném způsobu jeho návrhu, tentokrát aplikovaném pro normalizovaný stavový popis jsme dostali

$$\mathbf{R} = [ 0,972 \quad 0,598 \quad 0,341 \quad 0,322 \quad 0,140 \quad 0,785 ]$$

Popsaná úprava se na vnějším chování regulačního obvodu vůbec neprojevila. V simulačních pokusech a výpočtech s vysokou přesností nedošlo k pozorovatelné odchylce, změnilo se jen vnitřní uspořádání stavového popisu.

### 2.3.2 Vliv periody vzorkování

Perioda vzorkování obecně ovlivňuje nejen rychlost a délku regulačního pochodu, ale i informační obsah navzorkovaného spojitého signálu. Ovlivňuje i robustnost uzavřeného regulačního obvodu.

Póly přenosové funkce  $F_3(s)$  referenční dynamiky ramene se třemi závažími na jeho konci jsou

$$s_{1,2} = -2,950 \pm 21,186 i \quad , \quad s_{3,4} = -9,971 \pm 9,046 i \quad , \quad s_5 = -18,392$$

Maximální kruhová frekvence této dynamiky je  $\omega_{\max.} = 21,186$  [rad/s] . Podle Shannonova teorému, chceme-li vzorkováním zachytit i tuto frekvenci, je nutné volit vzorkovací frekvenci  $\omega_T$  alespoň dvakrát vyšší

$$\omega_T \geq 2 \omega_{\max.} = 2 \cdot 21,186 = 42,372$$

perioda vzorkování je pak

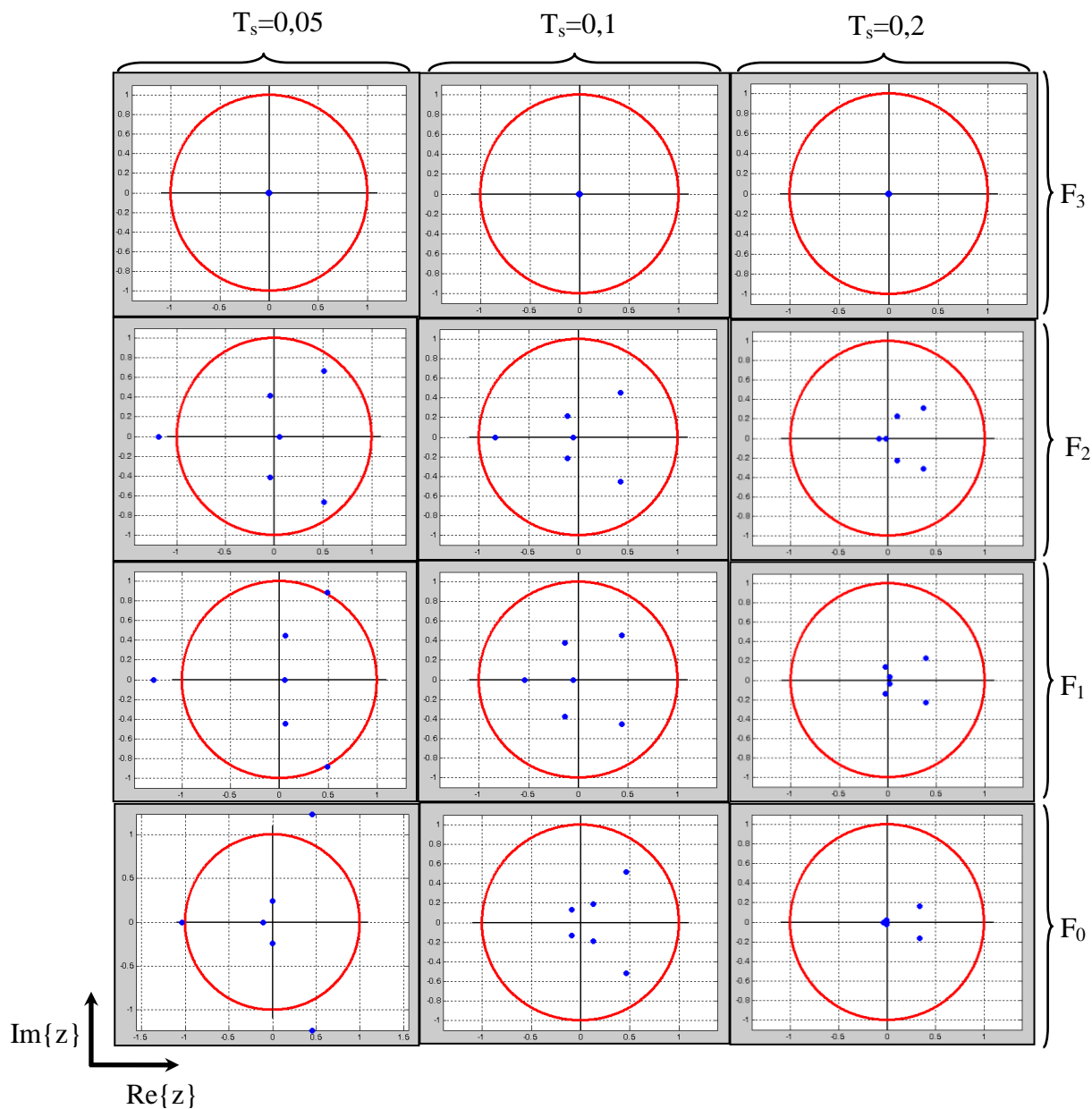
$$T_s \leq 2\pi / 42,372 \approx 0,148 \text{ [s]}$$

Sledujme vliv periody vzorkování  $T_s$  na dynamiku a rozložení pólů přenosové funkce uzavřeného regulačního obvodu složeného ze spojitě regulované soustavy, diskrétního estimátoru a diskrétního stavového regulátoru.

V prostředí Matlab-Simulink lze póly i takto komplikovaného systému poměrně jednoduše určit uzavřením příslušné simulační struktury do subsystému, jehož přenos pak určíme pomocí funkce „dlinmod“.

Na následující sekvenci obrázků je ukázán vliv periody vzorkování na rozložení pólů přenosů regulačních obvodů se všemi variantami zatížení ramene s extrémně „tvrdým“ regulátorem i estimátorem, navrženými v obou případech se všemi nulovými vlastními čísly  $\lambda_i$  svých dílčích dynamik („dead beat“ – konečný a minimální počet kroků regulace). Perioda vzorkování je volena po řadě  $T_s = 0,05$  ;  $0,1$  ;  $0,2$  sec.

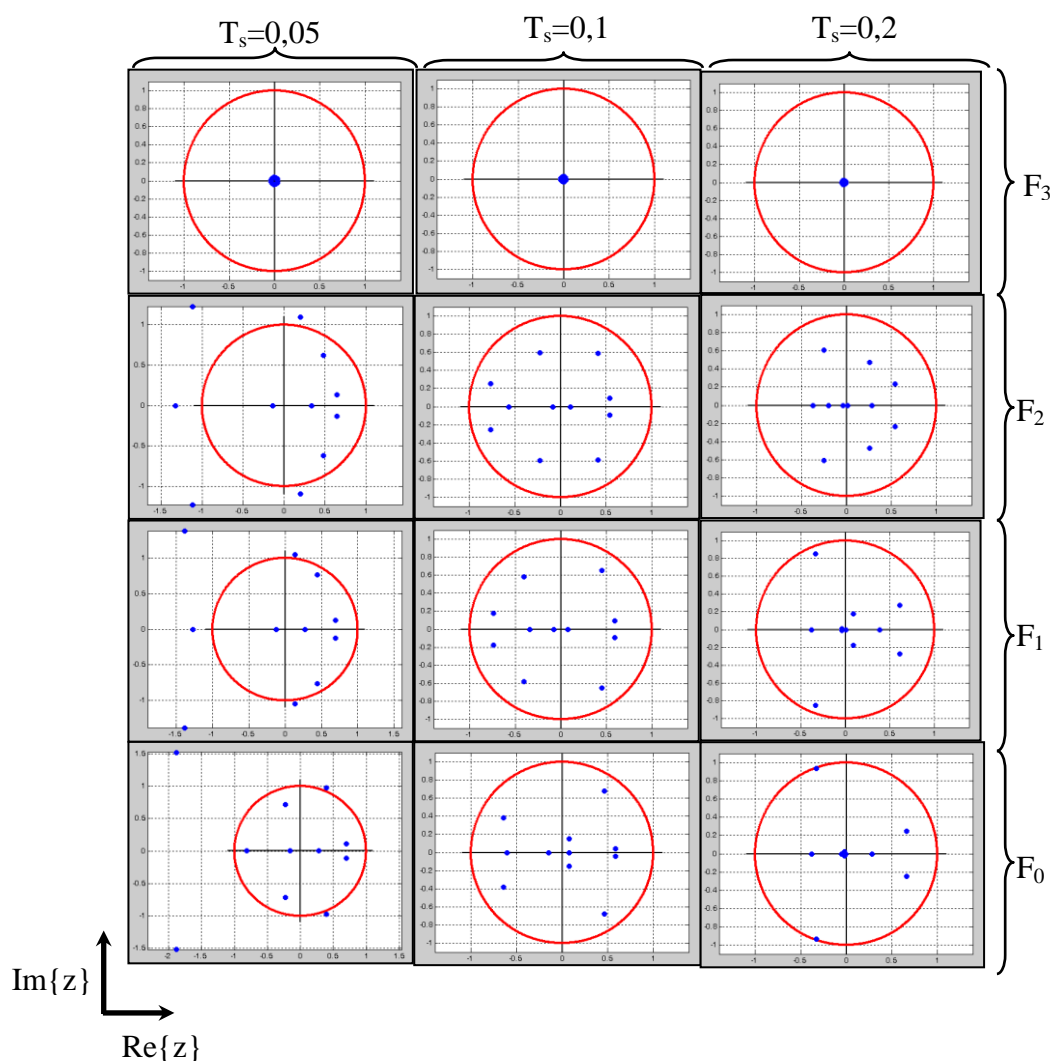
Aby bylo možné sledovat vliv estimátoru na chování celkového obvodu uved'me nejprve jednodušší variantu bez estimátoru (všechny složky stavového vektoru jsou měřitelné) a následně totéž s estimátorem (složky stavového vektoru jsou jím odhadovány).



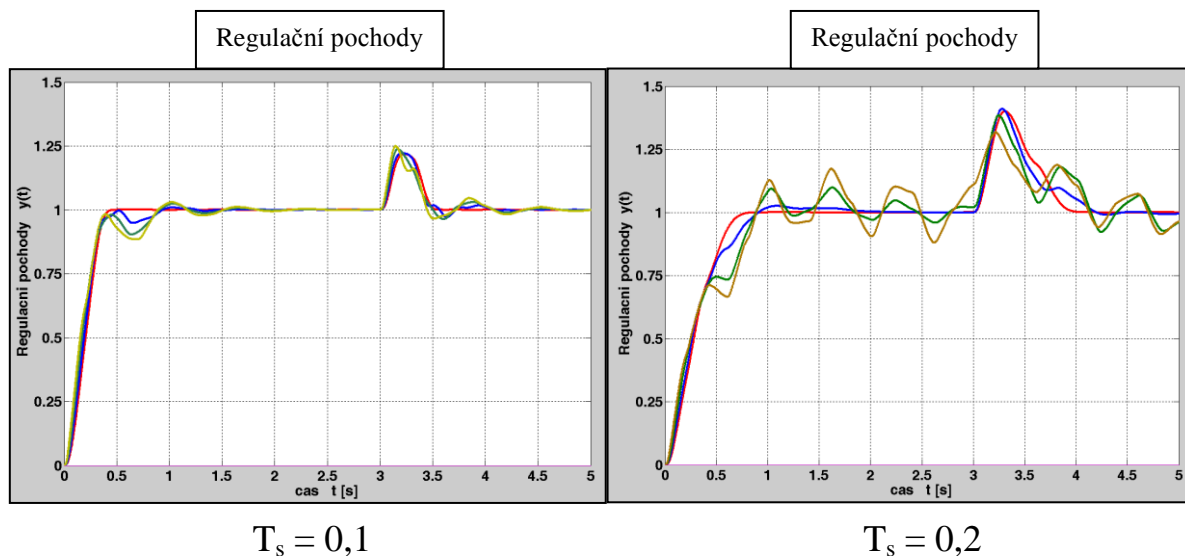
Obr. 19: Vliv periody vzorkování na rozložení pólů přenosové funkce obvodu

Z uvedeného je zřejmý stabilizující vliv delší periody vzorkování (prodlužování regulačního pochodu) a její pozitivní vliv na robustnost celého uzavřeného obvodu. Pro nejkratší uvedenou periodu vzorkování  $T_s = 0,05$  sec. jsou dokonce všechny regulační obvody s odchýlenou regulovanou soustavou ( $F_2(s)$ ,  $F_1(s)$ ,  $F_0(s)$ ) nestabilní. Je to způsobeno tím, že v tomto případě regulační pochod probíhá teoreticky velmi rychle a bez kmitavých složek jen díky rychlým a velkým akčním zásahům (které jsou v reálných podmínkách jen obtížně realizovatelné). Je to teoreticky možné jen za předpokladu velmi přesného modelu skutečné dynamiky regulované soustavy.

Další sekvence obrázků ilustruje vliv estimátoru na celkovou dynamiku regulačního obvodu. Jsou uvedeny pro srovnání stejné situace jako v předcházejícím případě pouze s tím, že stavové složky nejsou měřitelné, ale jsou odhadovány estimátorem.



Obr. 20: Vliv periody vzorkování na rozložení pólů přenosové funkce obvodu



Obr. 21: Regulační pochody s různou periodou vzorkování  $T_s$

Legenda : Všechny uvedené varianty regulačních pochodů jsou vyvolány změnou řídicí veličiny  $w(t) = \eta(t)$  a poruchou na vstupu do regulované soustavy  $d(t) = 0,5 \eta(t-3)$

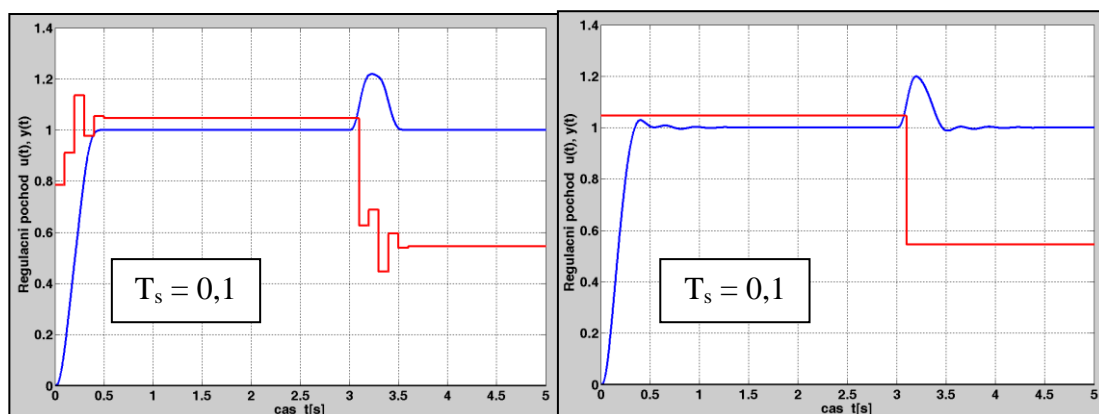
Povšimněme si, že perioda vzorkování  $T_s = 0,2$  sec. již nevyhovuje Shannonovu teorému. Uvedené průběhy regulačních pochodů pro tuto periodu vzorkování jsou ilustrativním příkladem důsledku ztráty informace vzorkováním s nevhodnou periodou vzorkování. Ztráta informace je též příčinou nevyváženého chování regulačního obvodu téměř na mezi stability.

### 2.3.3 Vliv nastavení regulátoru

Existují dvě extrémní varianty nastavení stavového regulátoru. Jednou z nich je extrémně „tvrdý“ regulátor, zajišťující v referenčním případě regulační pochod v konečném počtu regulačních kroků bez kmitavých složek. Jeho návrh je realizován volbou nulových všech vlastních čísel  $\lambda_i$  systémové matice uzavřeného obvodu.

Druhým extrémem je extrémně „měkký“ regulátor, realizovaný volbou vlastních čísel  $\lambda_i$  systémové matice uzavřeného obvodu shodných s vlastními čísly matice dynamiky regulované soustavy, viz kap. 2.2.2 . Regulační pochod je v referenčním případě realizován jediným optimálním akčním zásahem s volným dozníváním reakce podle přirozené dynamiky regulované soustavy.

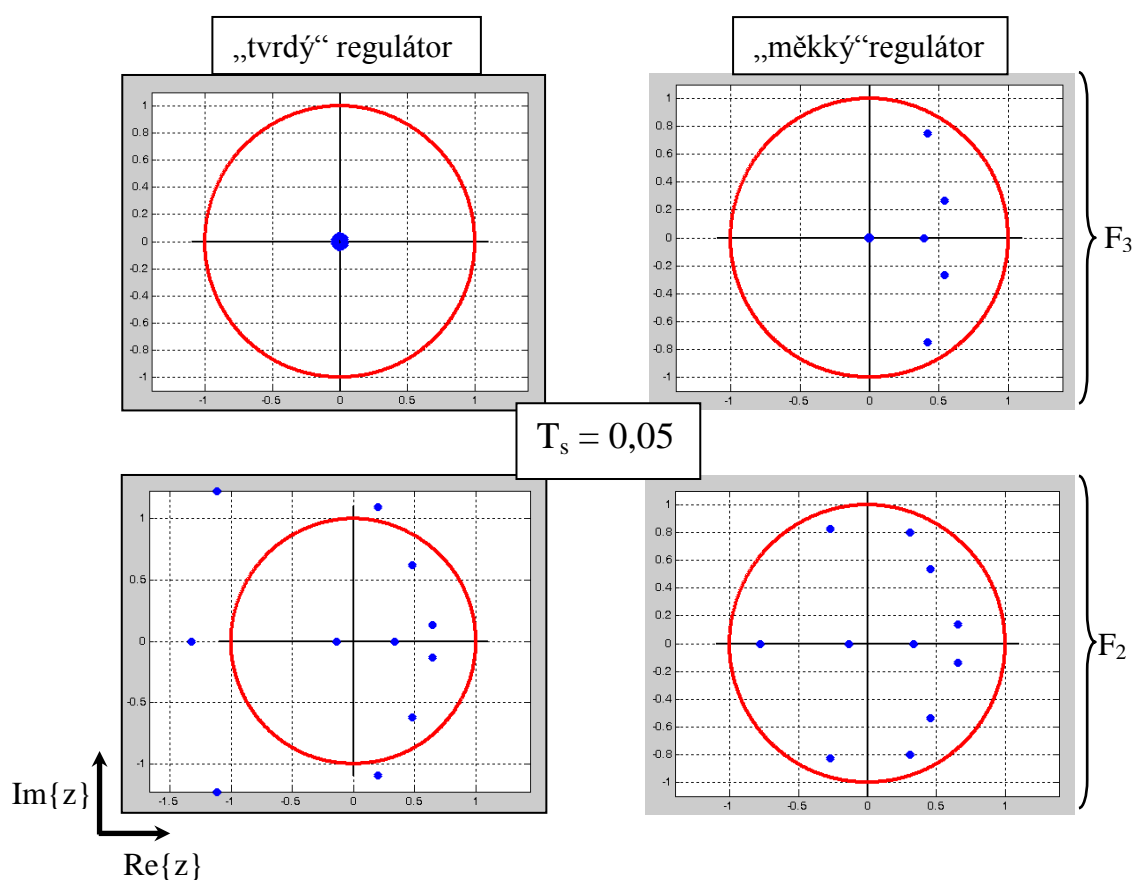
Příklad obou extrémních regulačních pochodů viz následující obrázky.



Obr. 22: Regulační pochody s extrémně navrženými regulátory

Legenda : Obě uvedené varianty regulačních pochodů jsou vyvolány změnou řídicí veličiny  $w(t) = \eta(t)$  a poruchou na vstupu do regulované soustavy  $d(t) = 0,5 \eta(t-3)$

Příkladem stabilizujícího efektu „měkkého“ regulátoru je jeho chování v obvodu s velmi krátkou periodou vzorkování  $T_s=0,05s$ .

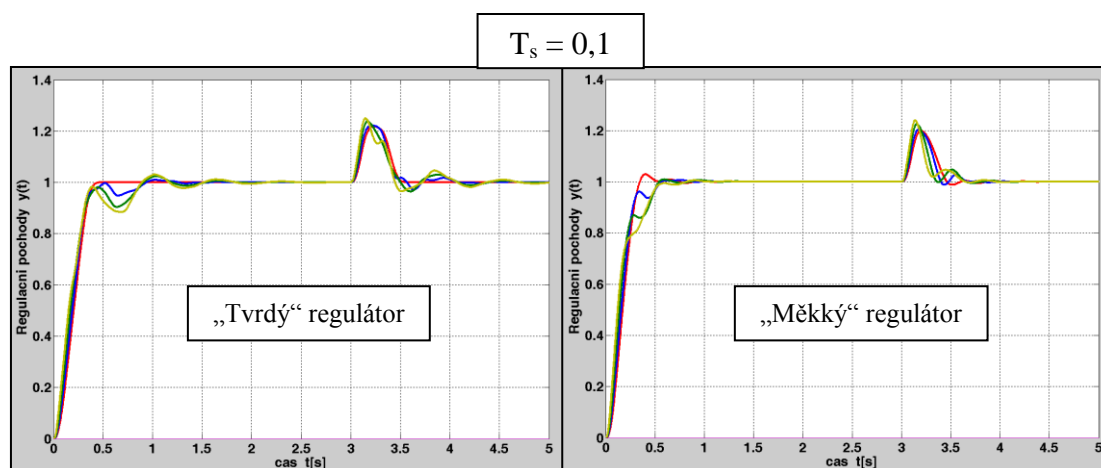


Obr. 23: Vliv regulátoru na rozložení pólů přenosové funkce obvodu



Předcházející příklad slouží pouze k ilustraci stabilizujícího efektu v extrémní situaci. V žádném případě neslouží k ukázce optimálního (nebo alespoň přijatelného) regulačního pochodu. Regulační pochod je kmitavý, obvod je téměř na mezi stability.

Kvalitnější regulační pochody získáme v obou případech s delším regulačním krokem  $T_s = 0,1$  sec.



Obr. 26: Regulační pochody s extrémně navrženými regulátory

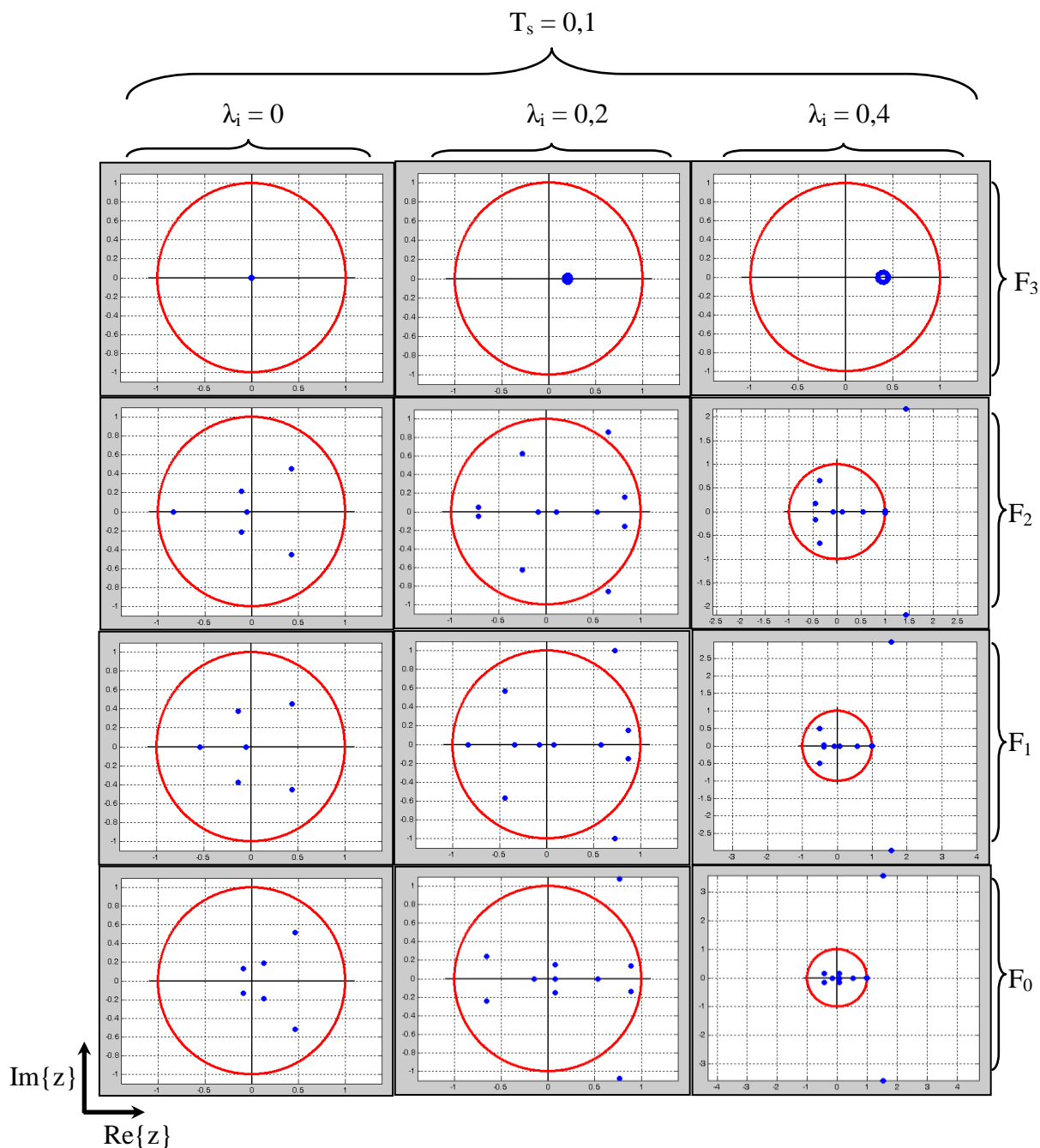
Legenda : Obě uvedené varianty regulačních pochodů jsou vyvolány změnou řídicí veličiny  $w(t) = \eta(t)$  a poruchou na vstupu do regulované soustavy  $d(t) = 0,5 \eta(t-3)$

Oba regulační pochody jsou v tomto případě podobné, zajišťující stabilitu všech odchýlených situací.



## Nevhodnost vnuceného aperiodického chování obvodu

Demonstrujme nevhodnost vcelku logické strategie návrhu regulátoru volbou vlastních čísel  $\lambda_i$  jako např. násobných reálných čísel na intervalu  $\lambda_i \in <0, +1>$  ve snaze zajistit „měkkší“ regulátor s aperiodickým regulačním pochodem.



Obr. 27: Vliv regulátoru na rozložení pólů přenosové funkce obvodu

Legenda :  $F_i(s)$  ... dynamika ramene s i závažími na jeho konci

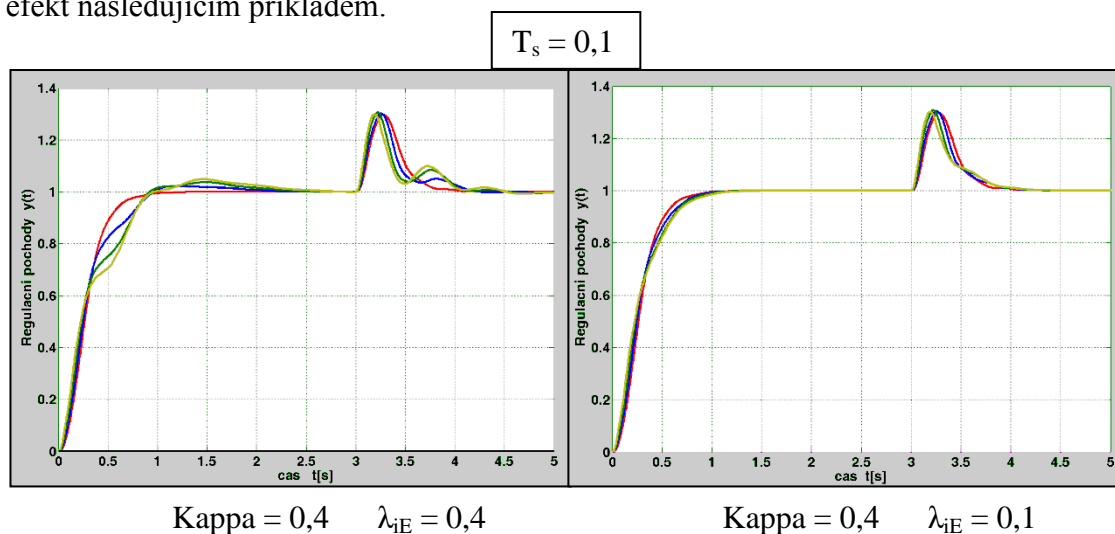
Paradoxně se velmi rychle dostáváme v odchylených situacích do nestability regulačního obvodu. Je to důsledek toho, že v návrhu regulátoru touto volbou vlastních čísel  $\lambda_i$  nutíme obvodu aperiodický průběh reakce, který regulátor v odchylených situacích se slábnoucí silou zpětné vazby není schopen zajistit.

S ohledem na robustnost obvodu je mnohem rozumnější netrvat na aperiodickém charakteru regulačních pochodů a přizpůsobit návrh regulátoru více méně přirozené dynamice regulované soustavy. Vhodnou strategií je např. návrh regulátoru minimalizací kvadratického kritéria, která se zvyšující se vahou na akční veličinu k této dynamice konverguje, viz kap. 2.2.2 .

### 2.3.4 Vliv dynamiky estimátoru

Dynamika uzavřeného regulačního obvodu je výslednicí dynamické spolupráce a vzájemného ovlivnění tří, relativně samostatných částí. Vlastní regulované soustavy, regulátoru a estimátoru. Je zřejmé, že každá tato část svým způsobem ovlivňuje dynamiku celku.

Navrhovaný regulátor a estimátor nemusejí mít stejné dynamické vlastnosti, nemusejí být ani navrženy se stejnou strategií. Vhodně navržený estimátor může významně ovlivnit dynamiku celého obvodu. Ukazuje se, že „opatrná strategie“ regulátoru, realizovaná buď delším regulačním krokem, nebo způsobem jeho návrhu, může být do jisté míry kompenzována rychlejší dynamikou estimátoru. Ilustrujme tento efekt následujícím příkladem.



Obr. 28: Regulační pochody

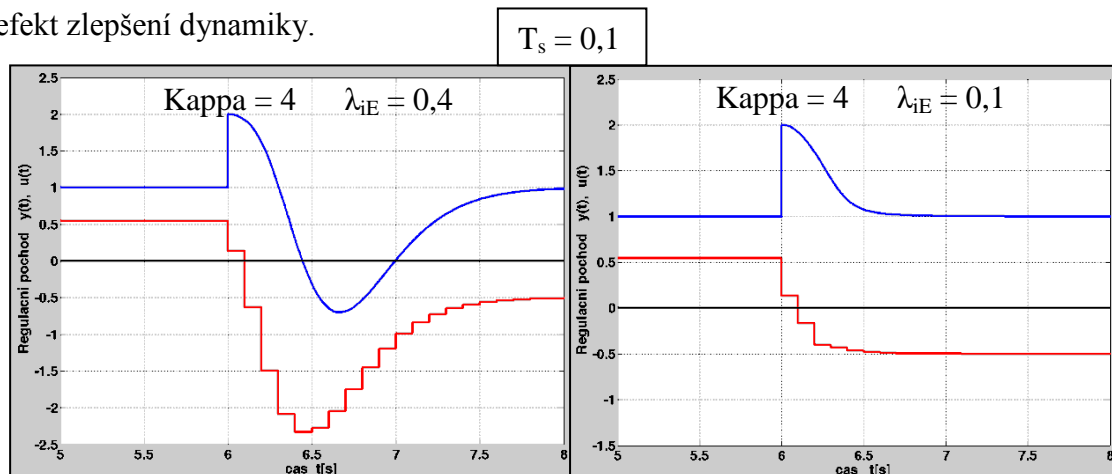
Obě uvedené varianty regulačních pochodů jsou vyvolány změnou řídicí veličiny  $w(t) = \eta(t)$  a poruchou na vstupu do regulované soustavy  $d(t) = 0,5 \eta(t-3)$ . V obou případech byl regulátor navržen minimalizací kvadratického kritéria

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [(y(k) - w(k))^2 + \text{Kappa} \cdot u(k)^2] \rightarrow \min. \quad (69)$$

vlastní čísla estimačního procesu byla volena násobná  $\lambda_{iE} = 0,4$  resp.  $0,1$ . Vliv stabilizačního efektu zvyšujícího robustnost obvodu je zřejmý z výše uvedených průběhů.

Zásadní zlepšení je však patrné na reakci regulačního obvodu na poruchy neměřitelné, které zatěžují regulační obvod, avšak do estimátoru nevstupují přímo, ale s dynamickým zpožděním daným reakcí celého obvodu. Tyto typy poruch jsou pro regulaci zvláště nepříjemné, protože estimátor neposkytuje regulátoru správnou informaci o rozvážení regulované soustavy, ale pouze odchýlené odhady stavových veličin.

Jako ilustrativní jsou uvedeny na následujících obrázcích regulační pochody stejně seřízených regulačních obvodů jako v předcházejícím případě, ale na neměřitelnou poruchu ve tvaru jednotkového skoku na výstupu z regulované soustavy. Pro jednoduchost jsou uvedeny pouze průběhy referenční, neodchýlené dynamiky regulované soustavy. Ostatní situace vykazují ve všech případech obdobný efekt zlepšení dynamiky.

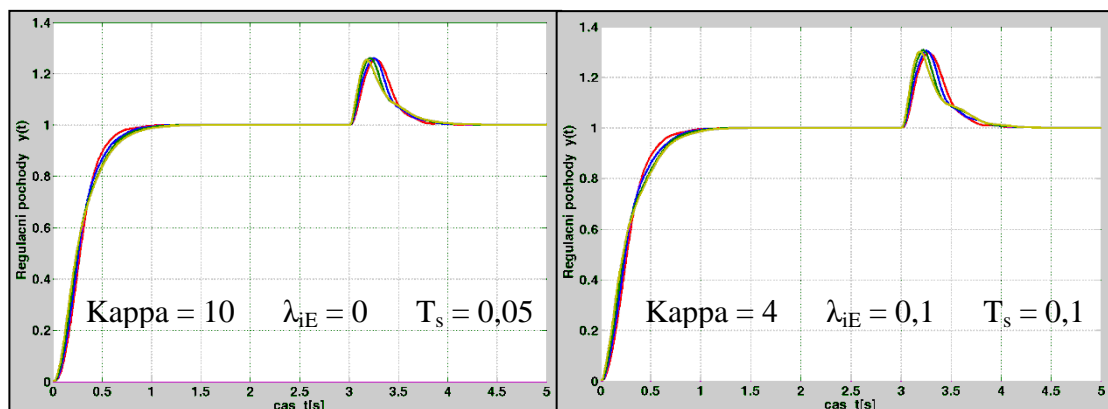


Obr. 29: Regulační pochody

Legenda : Obě uvedené varianty regulačních pochodů jsou vyvolány neměřitelnou poruchou na výstupu z regulované soustavy  $d_2(t) = \eta(t-6)$

**ALE !** Optimizmus výrazného zlepšení kvality regulačního pochodu a robustnosti celého obvodu může snadno vést k chybné strategii zvyšování váhy Kappa kvadratického kritéria (a tím zpomalování a zklidňování regulačního pochodu) kompenzované zkracováním regulačního kroku. Můžeme takto dosáhnout velmi podobných regulačních pochodů a prakticky stejné robustnosti obvodu, ale reakce na neměřitelné poruchy se tímto způsobem výrazně zhorší.

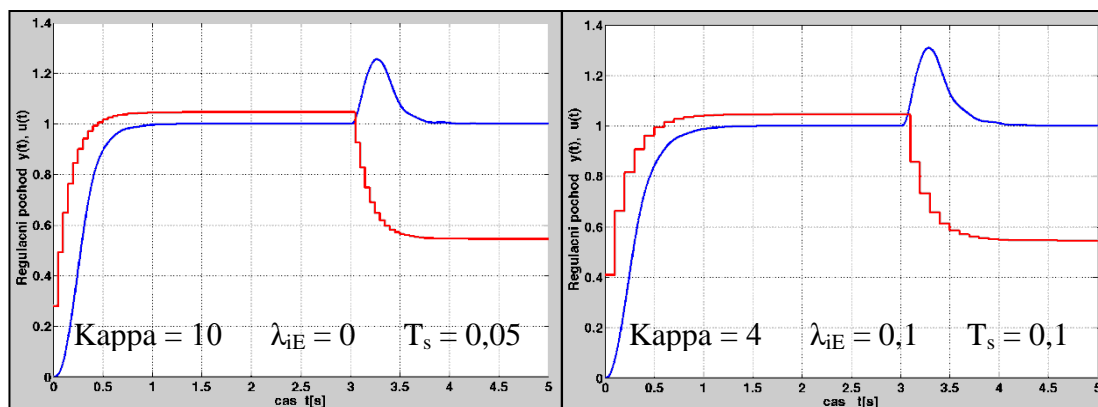
Pro ilustraci tohoto nevhodného efektu mohou posloužit následující situace



Obr. 30: Regulační pochody

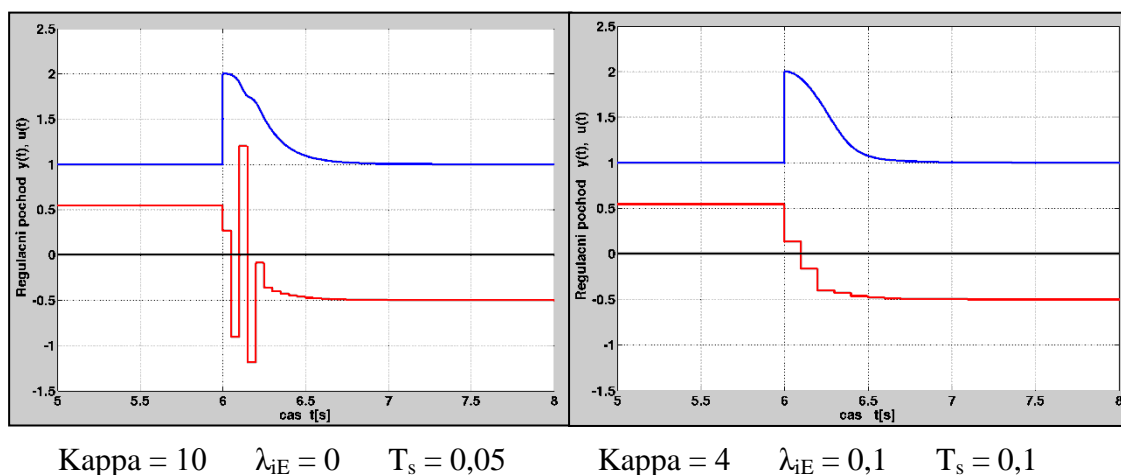
Legenda : Obě uvedené varianty regulačních pochodů jsou vyvolány změnou řídicí veličiny  $w(t) = \eta(t)$  a poruchou na vstupu do regulované soustavy  $d_1(t) = 0,5 \eta(t-3)$

Obě uvedené varianty regulačních pochodů jsou ve všech případech (i odchýlené dynamiky) na měřitelné poruchy prakticky shodné. Oba rozdílně seřizené regulační obvody vykazují i prakticky shodnou robustnost. Podobné jsou i průběhy akční veličiny (ukázáno pro jednoduchost opět pouze na případu s referenční dynamikou regulované soustavy).



Obr. 31: Regulační pochody

Výrazně se však liší reakce regulačního obvodu na neměřitelnou poruchu. V regulačním obvodu s kratším regulačním krokem se objevují velké a rychlé akční zásahy, které jsou problematicky technicky realizovatelné reálnými akčními členy skutečného regulačního obvodu. Mohou tak způsobit druhotné snížení robustnosti obvodu způsobené jeho technickou realizací.



Obr. 32: Regulační pochody

Legenda : Obě uvedené varianty regulačních pochodů jsou vyvolány neměřitelnou poruchou na výstupu z regulované soustavy  $d_2(t) = \eta(t-6)$

- Zrychlení estimačního procesu má pozitivní vliv na dynamické vlastnosti
- regulačního obvodu, zvyšuje jeho robustnost. Zvyšování váhy Kappa na akční
- veličinu v kvadratickém kritériu se současným zkracováním regulačního kroku
- je však nevhodné.

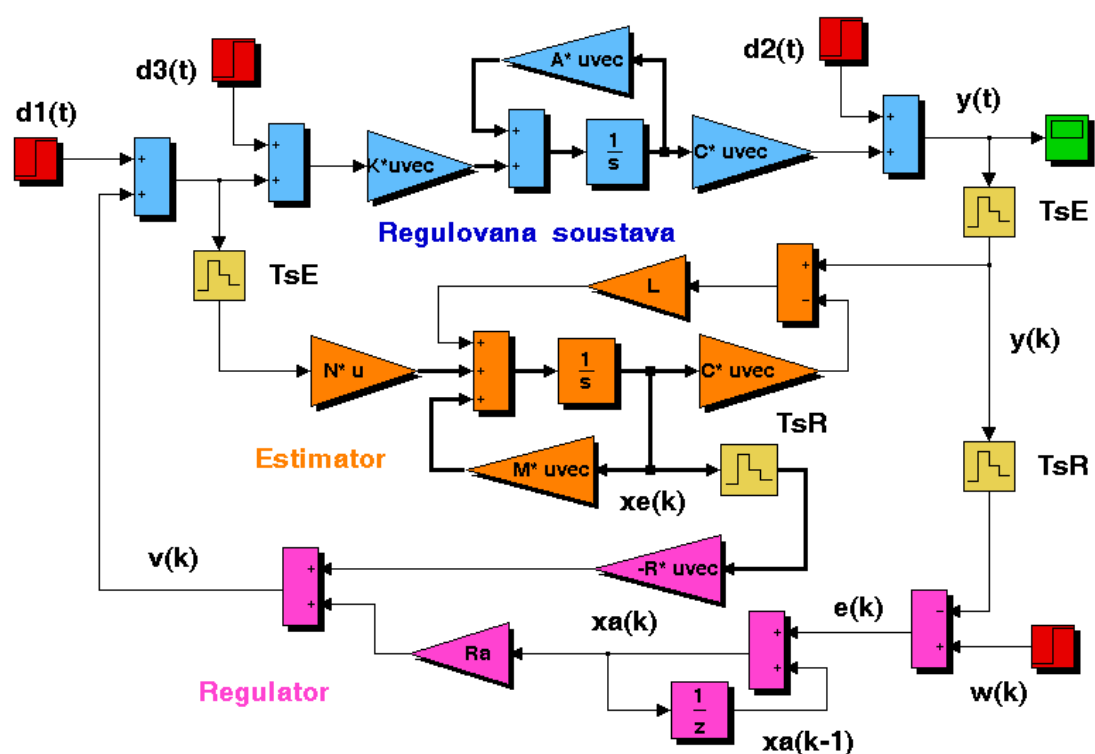
### 2.3.5 Rozdílný krok regulátoru a estimátoru

Poněkud nestandardní je spolupráce diskrétního regulátoru a diskrétně pracujícího estimátoru, pokud každý z nich pracuje s jinou periodou vzorkování. Estimátor skutečný stav regulované soustavy pouze odhaduje s chybou, která se v průběhu regulačního pochodu zmenšuje. Pokud regulátor nemá přesný odhad jednotlivých složek stavového vektoru, výpočet řídicího algoritmu vede na neoptimální akční zásahy a ve svém důsledku na regulační pochod, který se liší od teoreticky optimálního.

Myšlenkou je estimovat stav s násobně kratší periodou vzorkování než je perioda regulace (a tím i relativně rychlejší dynamikou estimačního procesu), potlačit co nejvíce nepřesných odhadů a poskytnout regulátoru kvalitnější informaci o rozvážení soustavy.

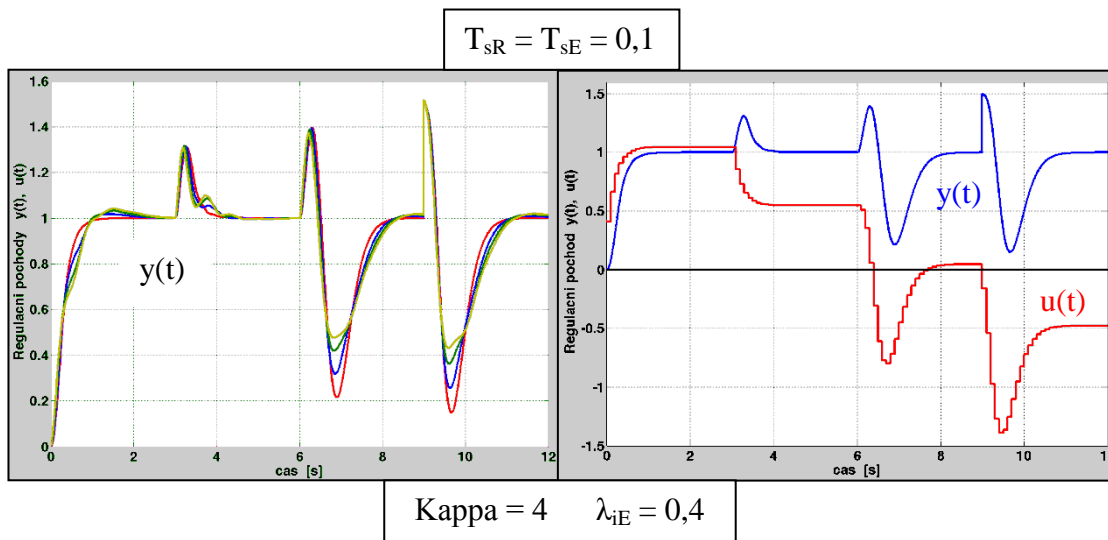
Volíme v tomto případě krok regulace  $T_{sR}$  jako celočíselný násobek estimačního kroku  $T_{sE}$ .

Výsledkem této modifikace je očekávaný efekt, analogický k efektu, který byl vyvolán návrhem estimátoru s rychlejší dynamikou, jež byl popsán v předcházející kapitole. Ukažme si tento vliv na sekvenci následujících simulovaných průběhů, na kterých jsou uvedeny regulační pochody uzavřeného obvodu se všemi uvažovanými variantami regulované soustavy.



Obr. 33: Simulační schéma regulačního obvodu

$w(k)$	...	žádaná hodnota regulované veličiny (řídící veličina)
$d_1(t)$	...	„měřitelná“ porucha na vstupu do regulované soustavy (působí shodně na estimátor i regulovanou soustavu)
$d_2(t)$ resp. $d_3(t)$	...	„neměřitelná“ porucha na výstupu resp. na vstupu do regulované soustavy (estimátor i regulovaná soustava jsou jimi buzeny odlišně)

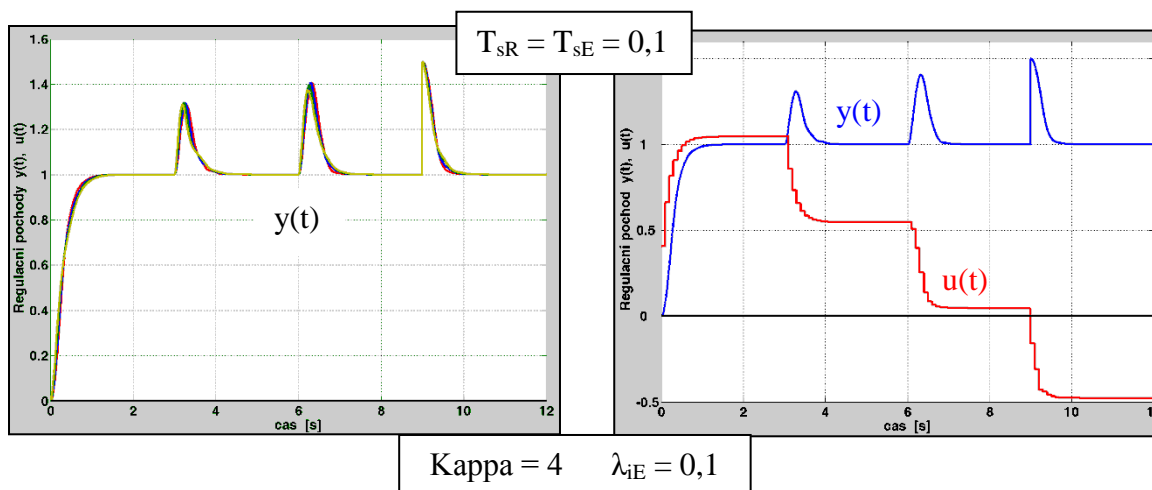


Obr.34 Regulační pochody

Obr.35 Regulační pochod

Na obrázcích Obr. 34, 35 jsou uvedeny pro srovnání regulační pochody obvodu se stejným estimačním i regulačním krokem. Syntéza obvodu byla provedena stejně jako v příkladech předcházející kapitoly. Regulator byl seřízen podle kvadratického kritéria, viz 1.5.2 s parametrem  $Kappa = 4$ , vlastní čísla estimačního procesu byla volena násobná  $\lambda_{iE} = 0,4$ . Regulační pochod byl vybuzen změnou řídicí veličiny  $w(t) = \eta(t)$  a poruchami  $d_1(t) = 0,5 \eta(t-3)$ ,  $d_3(t) = 0,5 \eta(t-6)$  a  $d_2(t) = 0,5 \eta(t-9)$ . Na Obr. 35 je pro jednoduchost uveden regulační pochod pouze s referenční dynamikou soustavy (tři závaží) i s vyznačeným průběhem akční veličiny. Je uveden shodný regulační pochod, jako v předcházející kapitole, tentokrát přehledně s reakcí obvodu na všechny uvažované poruchy.

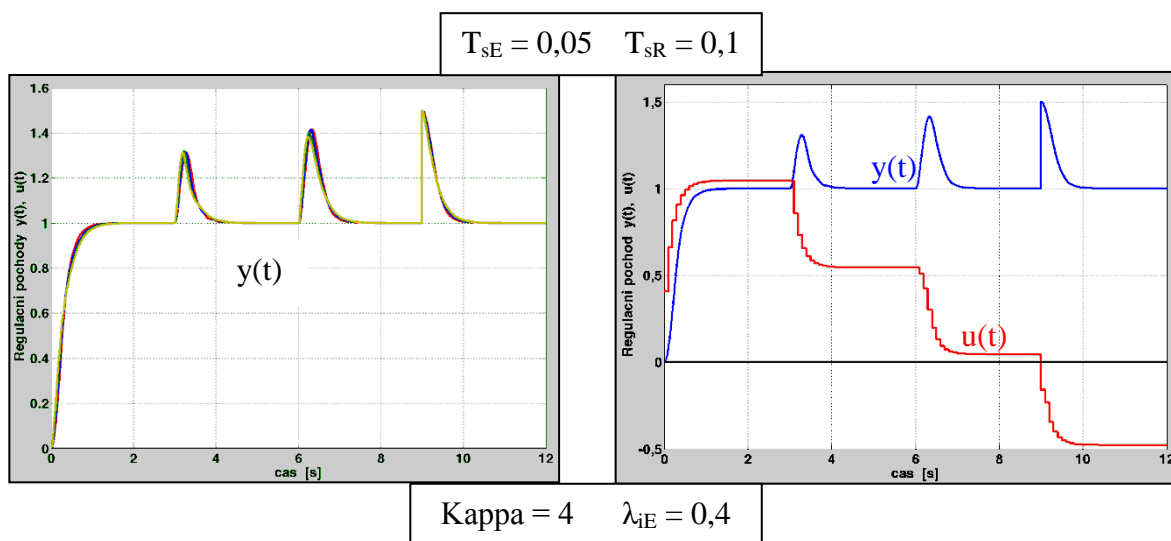
Na obrázcích Obr.36, 37 jsou uvedeny (opět jen pro srovnání) pochody stejně vybuzeného obvodu, i v tomto případě se stejným estimačním i regulačním krokem, ovšem s rychlejším estimátorem. Efekt zkvalitnění regulačního pochodu, zejména reakce na neměřitelné poruchy, byl diskutován v minulé kapitole.



Obr.36 Regulační pochody

Obr.37 Regulační pochod

Prakticky shodného zlepšení však dosáhneme i zkrácením estimačního kroku.



Obr.38 Regulační pochody

Obr.39 Regulační pochod

Výsledek bylo možné očekávat, zrychlili jsme estimační proces, tentokrát zkrácením estimačního kroku.

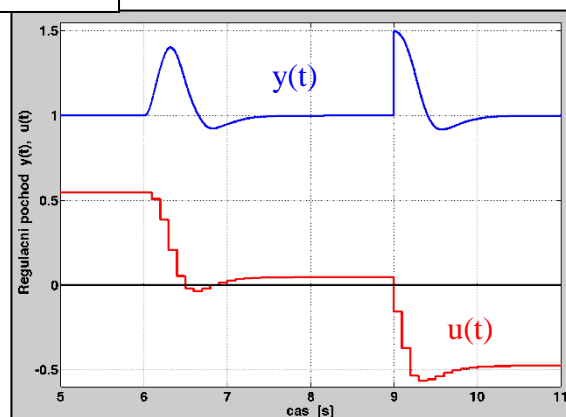
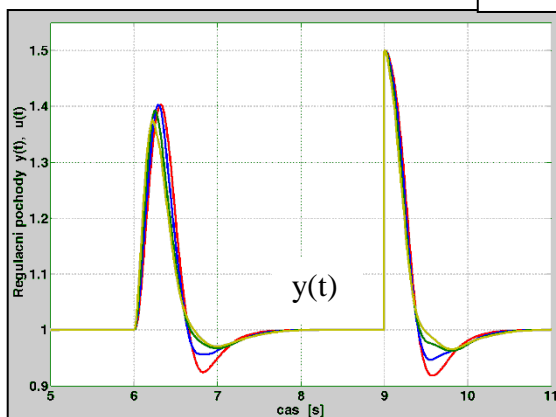
Povšimněme si, že návrh estimátoru neovlivní zásadním způsobem reakci obvodu na  $w(t)$ ,  $d_1(t)$ . Jedná se o tzv. „měřitelné“ poruchy, které budí shodně dynamiku regulované soustavy i estimátoru. Je to logický důsledek toho, že estimátor je fakticky paralelním modelem regulované soustavy s korekcí odvozenou od rozdílu mezi skutečnou a estimovanou hodnotou regulované veličiny. V tomto případě je však tento rozdíl nulový. Pro regulační obvod s referenční dynamikou by teoreticky volba estimátoru neměla vůbec ovlivnit jeho reakci na poruchy tohoto typu. Projeví se, ale zásadním způsobem v reakci na poruchy  $d_2(t)$ ,  $d_3(t)$ , tzv. „neměřitelné“ poruchy, které působí na soustavu i estimátor odlišným způsobem.

Demonstrujme v dalším vliv návrhu estimátoru na reakci obvodu pouze pro poruchy „neměřitelné“  $d_2(t)$ ,  $d_3(t)$ .

Sledujme na následující sekvenci obrázků vliv zvyšující se rychlosti estimace nejprve se stejným estimačním a regulačním krokem. V levé části je vždy detail reakce obvodu se všemi uvažovanými variantami dynamiky regulované soustavy, v pravé části reakce obvodu s referenční dynamikou, vč. průběhu akční veličiny.



$$T_{sR} = T_{sE} = 0,1$$

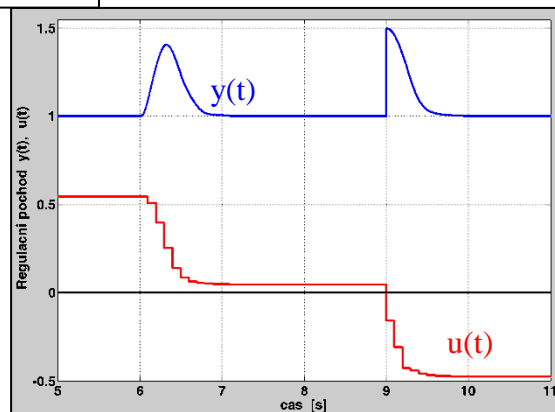
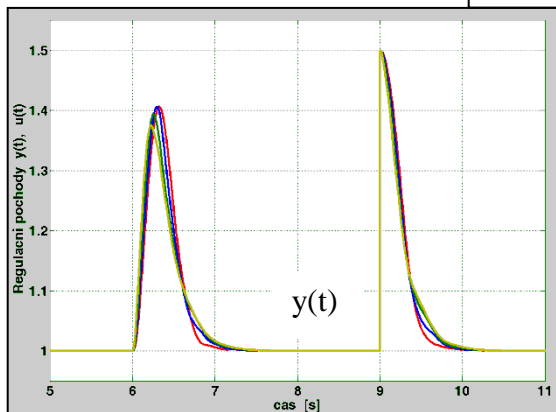


$$Kappa = 4 \quad \lambda_{iE} = 0,2$$

Obr.40 Regulační pochody

Obr.41 Regulační pochod

$$T_{sR} = T_{sE} = 0,1$$

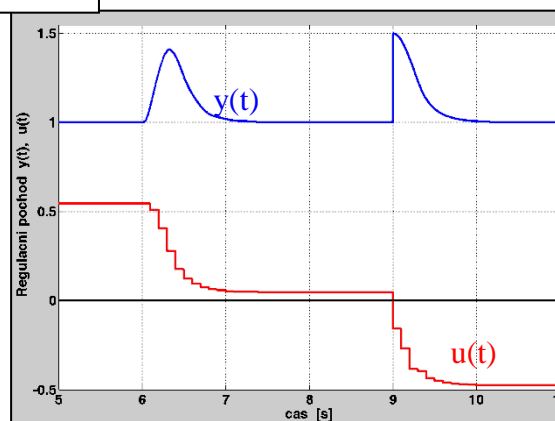
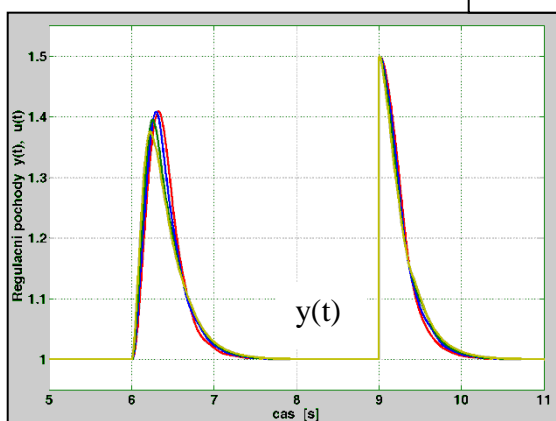


$$Kappa = 4 \quad \lambda_{iE} = 0,1$$

Obr.42 Regulační pochody

Obr.43 Regulační pochod

$$T_{sR} = T_{sE} = 0,1$$



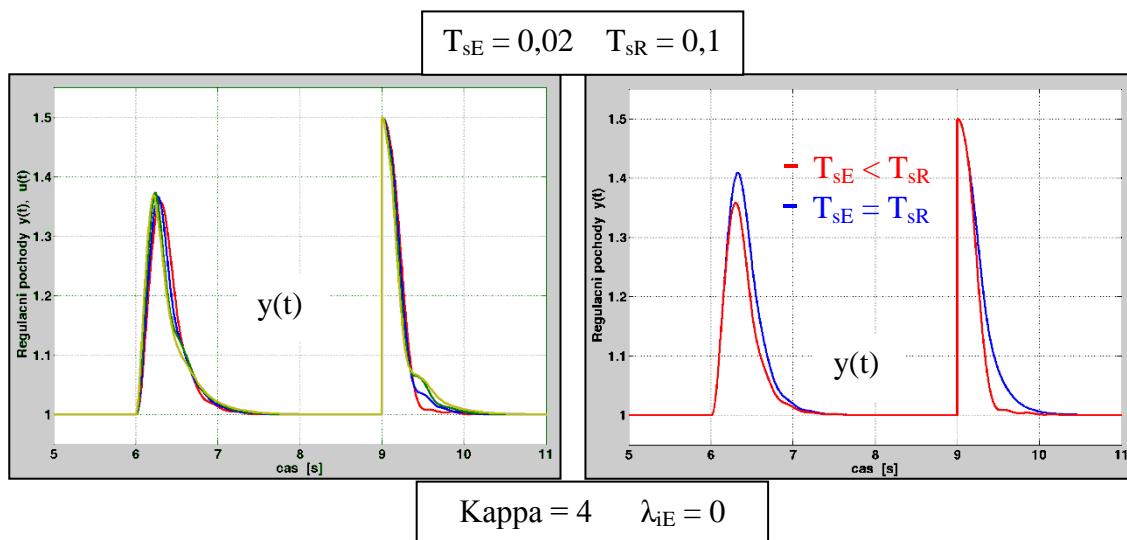
$$Kappa = 4 \quad \lambda_{iE} = 0$$

Obr.44 Regulační pochody

Obr.45 Regulační pochod

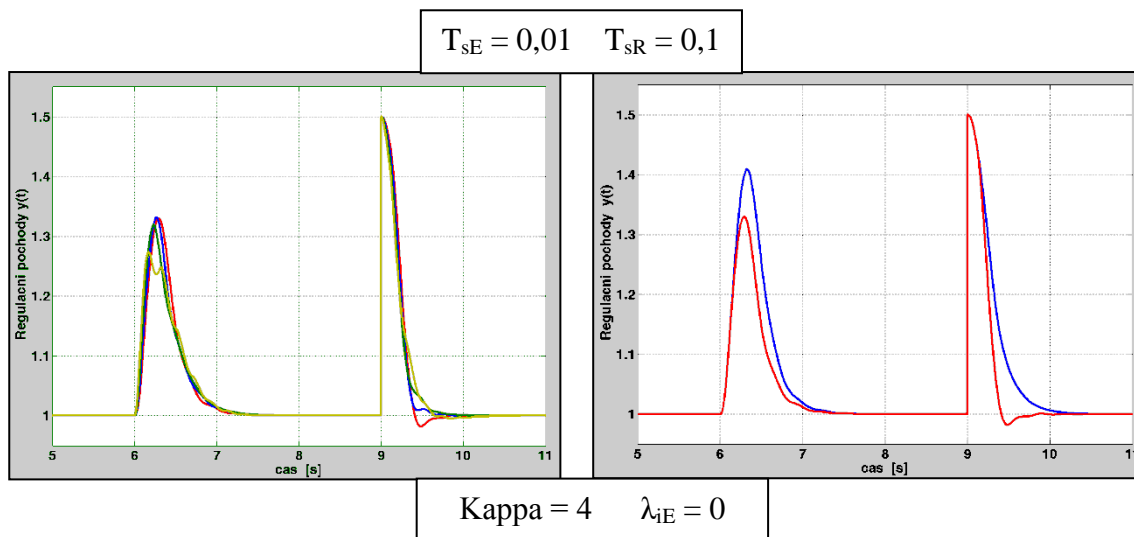
Z uvedených průběhů je zřejmý pozitivní vliv zrychlování dynamiky estimace na kvalitu regulačního pochodu i zlepšení robustnosti uzavřeného obvodu.

Dalším možným urychlením estimačního procesu je zkrácení estimačního kroku. Ukažme si opět jeho vliv na sekvenci následujících průběhů. V pravé části jsou však zde uvedeny pro srovnání dvě varianty reakce obvodu s referenční dynamikou pro  $T_{sE} = T_{sR}$  a  $T_{sE} < T_{sR}$ .



Obr.46 Regulační pochody

Obr.47 Regulační pochod

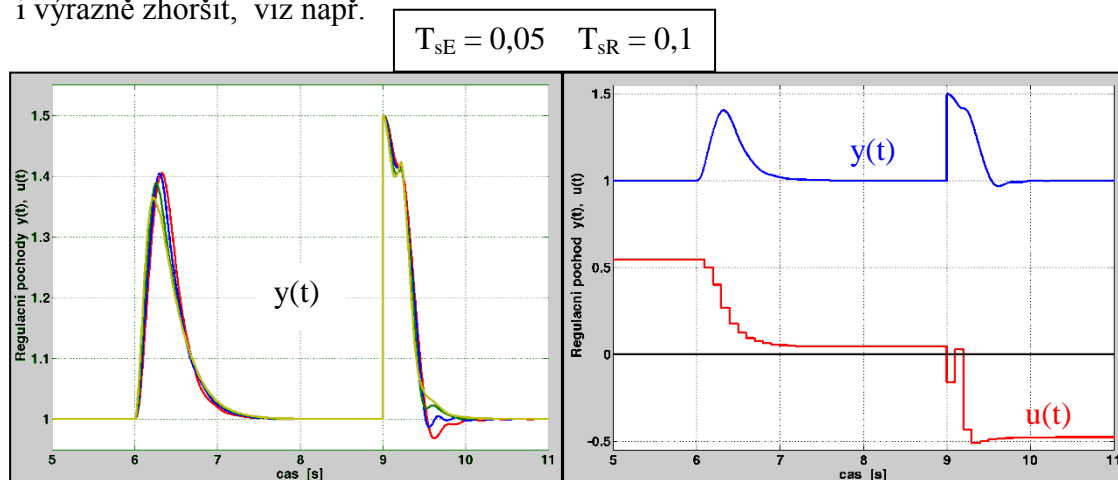


Obr.48 Regulační pochody

Obr.49 Regulační pochod

Je opět patrné zlepšování regulačního pochodu. Další zkracování estimačního kroku se na dynamice obvodu již významně neprojevovalo.

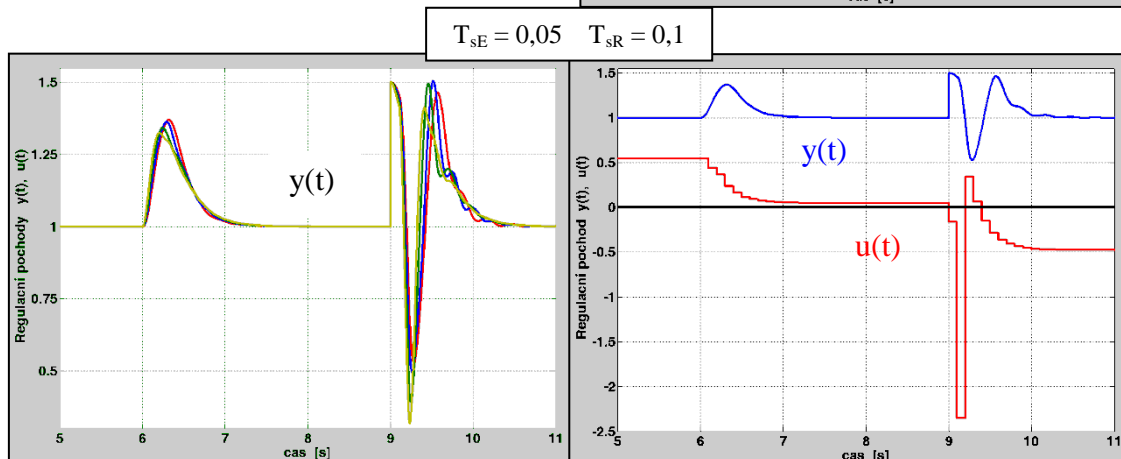
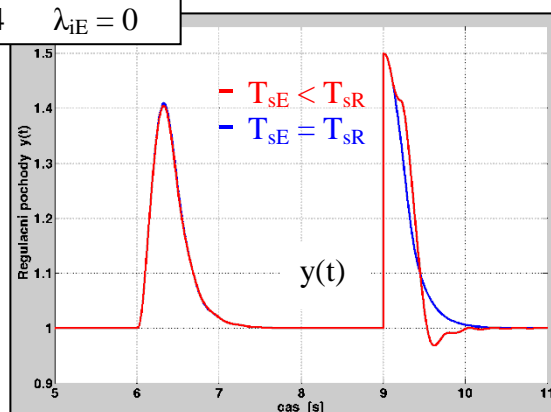
**ALE !** Nevhodným zkrácením kroku estimace můžeme dynamiku obvodu paradoxně i výrazně zhoršit, viz např.



$Kappa = 4 \quad \lambda_{iE} = 0$

$$T_{sR} = 2 \cdot T_{sE}$$

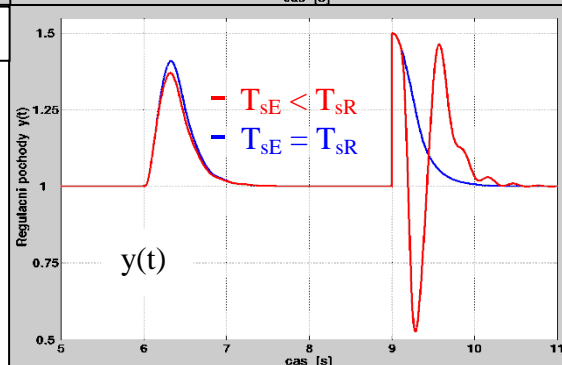
Obr.50 Regulační pochody



$Kappa = 4 \quad \lambda_{iE} = 0$

$$T_{sR} = 3 \cdot T_{sE}$$

Obr.51 Regulační pochody



Zlepšení dynamiky uzavřeného regulačního obvodu nastalo v našem případě až při  $n$ -násobném zkrácení estimačního kroku

$$T_{sE} \leq T_{sR} / n, \quad n = 5 \dots \text{řád regulované soustavy}$$

Souvisí to s tím, že navržený estimátor, v tomto případě v konečném počtu kroků, poskytuje správný odhad až po  $n$  krocích daných řádem regulované soustavy. V kratším intervalu poskytuje odhady nepřesné. Může proto dojít snadno při malém zkrácení estimačního kroku ke zhoršení odhadu a zhoršení dynamických vlastností regulačního obvodu. Při návrhu estimátoru v jiném než konečném počtu kroků estimace toto nebezpečí nehrozí.

## Závěr

Práce je věnovaná problematice regulačního obvodu se stavovým regulátorem a jeho dynamickým vlastnostem. Zabývá se způsobem návrhu diskrétního stavového regulátoru, estimací stavu regulované soustavy, ale zejména rozбором aspektů, které ovlivňují kvalitu regulačního pochodu a robustnost celého obvodu. Na konkrétním laboratorním modelu pružného ramene robota operujícího s různě hmotným břemenem byly naměřeny jeho čtyři rozdílné dynamiky, které následně posloužily k testování robustnosti obvodu.

Pro určení matematických modelů všech čtyř variant byla použita rekurzivní identifikační metoda minimalizující iteračním způsobem kvadráty rozdílů poradnic naměřené přechodové charakteristiky a její identifikační aproximace s respektováním evidentních dynamických markantů.

Standardní přechod na stavové vyjádření dynamiky prostým přepisem koeficientů příslušné přenosové funkce do stavových matic Frobeniových kanonických tvarů vedl na návrh regulátoru, jehož koeficienty se vzájemně velmi lišily a výpočet řídicího algoritmu vyžadoval násobení veličin lišících se až o sedm řádů. Takovýto regulátor nebyl prakticky využitelný a vykazoval druhotnou aplikační numerickou nestabilitu vlivem zaokrouhlovacích chyb při výpočtu s nižší přesností. Jednoduchá normalizace stavové reprezentace prostým dělením jednotlivých složek stavového vektoru jejich maximálními hodnotami tento nedostatek odstranila.

Teoretickým rozбором i simulačním ověřením byla prokázána nezávislost dynamického chování uzavřeného obvodu na konkrétní stavové reprezentaci regulované soustavy a konkrétní topologické konstrukci estimátoru, využívající či nevyužívající odhadu regulované veličiny.

Návrh regulátoru paradoxně neovlivní číselný přenosové funkce celého uzavřeného obvodu, jeho chování je jednoznačně dáno rozložením pólů přenosové funkce, které naopak ovlivnit návrhem regulátoru lze. Tyto póly jsou shodné s vlastními čísly systémové matice obvodu a nezáleží na metodice návrhu regulátoru (poles placement, minimalizace kvadratické plochy, aj.), tedy na způsobu jak tohoto rozložení dosáhneme, na jejich poloze samozřejmě ano. „Nejtvrdší“ možný regulátor získáme volbou všech vlastních čísel systémové matice obvodu rovných nule (přesněji, jednoho násobného

nulového vlastního čísla). Jeho aplikací získáme regulační pochod končící v konečném a minimálním počtu regulačních kroků (tzv. dead beat). Opačného extrému, naopak „nejměkčího“ regulátoru, dosáhneme volbou těchto vlastních čísel shodných s vlastními čísly matice dynamiky regulované soustavy. K tomuto extrému ostatně konverguje i návrh regulátoru metodou minimalizace kvadratické plochy s váhou na akční veličinu rostoucí nade všechny meze.

Aspekty ovlivňující kvalitu regulace a robustnost obvodu. Zvyšující se délka regulačního kroku zpomaluje a zklidňuje regulační pochod a zvyšuje robustnost obvodu. Jeho volba však musí být v souladu se Shannonovým teorémem, jinak klesá informační obsah navzorkovaného spojitého signálu a v jeho důsledku se prudce zhoršuje nejen kvalita regulace, ale i robustnost obvodu. Krátký regulační krok vede na rychlý regulační pochod vyžadující však přesný model, je tedy málo robustní. Volba regulačního kroku je vždy kompromisem mezi kvalitou regulačního pochodu a jeho robustností.

Návrhem regulátoru (přesněji umístěním vlastních čísel systémové matice obvodu) můžeme výrazně ovlivnit nejen kvalitu regulačního pochodu, ale i robustnost celého obvodu. Obecně platí, že čím „tvrdší“ regulátor, tím rychlejší regulační pochod, ale také větší nároky na přesnost modelu a tedy obecně menší robustnost obvodu. A také naopak. Tento efekt je však nutné posuzovat v součinnosti s délkou regulačního kroku, jde spíše o rychlost celkového regulačního pochodu. Volíme-li delší regulační krok, můžeme volit „tvrdší“ regulátor a naopak. Samozřejmě, zejména u stochastických systémů, kdy předpokládáme aditivní zátěž signálů stochastickými šumy, nemůžeme délku regulačního kroku libovolně zvyšovat. V těchto případech jsme ještě přísněji vázáni Shannonovým teorémem s ohledem na předpokládané spektrum přítomného šumu.

Prosté excentrické posunutí vlastních čísel systémové matice obvodu ještě samo o sobě nezajišťuje „měkčí“ regulátor a větší robustnost obvodu. Vcelku logická strategie posouvání vlastních čísel po reálné ose v intervalu  $< 0, +1 >$  vedená snahou získat regulační pochod bez kmitavých složek, vede velmi rychle při dané periodě vzorkování ke ztrátě robustnosti obvodu. Příčinou je velmi odlišná vnucená dynamika obvodu (daná tímto návrhem) od přirozené dynamiky regulované soustavy. Vhodnou strategií

je např. návrh regulátoru minimalizující kvadratické kritérium, které se zvyšující se vahou na akční veličinu vede k „měkčímu“ regulátoru.

Dalším prvkem výrazně ovlivňujícím dynamiku uzavřeného regulačního obvodu je estimátor. Estimátor ve zpětné vazbě komplikuje dynamiku regulačního obvodu a v případě odchýlené dynamiky regulované soustavy dominantním způsobem destabilizuje regulační pochod a snižuje robustnost celého obvodu.

Navržený regulátor a estimátor však nemusejí mít stejné dynamické vlastnosti, nemusejí být ani navrženy se stejnou strategií. Vlastní čísla regulačního a estimačního pochodu mohou být zcela rozdílná. Ukazuje se, že „opatrná strategie“ regulátoru, realizovaná buď delším regulačním krokem nebo způsobem jeho návrhu, může být do jisté míry kompenzována rychlejší dynamikou estimátoru. Rychlejší dynamika estimátoru zlepšuje robustnost obvodu. Projevuje se však hlavně dramatickým zlepšením regulačního pochodu vyvolaného „neměřitelnými“ poruchami, které svým charakterem odlišně působí na dynamiku regulované soustavy a estimátoru.

Efekt výrazného zlepšení kvality regulace a také robustnosti celého regulačního obvodu, může snadno vést k chybné strategii zvyšování váhy kvadratického kritéria na akční veličinu (a tím zpomalování a zklidňování regulačního pochodu) kompenzované zkracováním regulačního kroku. Můžeme takto dosáhnout poměrně dobrých regulačních pochodů i robustnosti celého obvodu, ale reakce na „neměřitelné“ poruchy se tímto způsobem zásadně zhorší.

Možností dalšího zlepšení je poněkud nestandardní varianta nestejných kroků regulace a estimace. Pokud je krok regulátoru celistvým násobkem kroku estimace, poskytuje rychlejší estimátor regulátoru v okamžiku výpočtu akční veličiny kvalitnější informaci o rozvážení regulované soustavy. Důsledkem je relativní zlepšení robustnosti regulačního obvodu, ale hlavně další výrazné zlepšení regulačního pochodu vyvolaného „neměřitelnými“ poruchami.

Tato strategie může paradoxně naopak vést při nevhodné volbě i ke zhoršení regulačního pochodu. Použijeme-li vůbec nejrychleji pracující estimátor navržený se strategií konečného počtu kroků estimace, projeví se pozitivní vliv až při více než  $n$ -násobném zkrácení estimačního kroku, kde  $n$  je řád regulované soustavy. Souvisí to s tím, že navržený estimátor poskytuje v tomto případě správný odhad

až po  $n$  krocích (daných řádem regulované soustavy). V kratším časovém intervalu poskytuje pouze odhady nepřesné. Může proto dojít snadno při malém zkrácení estimačního kroku ke zhoršení odhadu a zhoršení dynamických vlastností regulačního obvodu. Při návrhu estimátoru v jiném než konečném počtu kroků estimace toto nebezpečí nehrozí.

Tato práce není v žádném případě vyčerpávající analýzou možného ovlivnění dynamických vlastností regulačního obvodu, ani uzavřeným výčtem možných přístupů k hledání vhodného kompromisu mezi kvalitou regulačních pochodů a robustností obvodu. Je jen skromným příspěvkem k řešení mnohem rozsáhlejší problematiky. Nosnou myšlenkou se zdálo být posouzení věrohodnosti odhadu některých stavových veličin a následné vyloučení málo věrohodných složek z algoritmu řízení. Tuto myšlenku se bohužel nepodařilo dovést k termínu odevzdání práce do publikovatelného stavu.



## Literatura

- [1] **Modrlák, O.** : Základy analýzy a syntézy ve stavovém prostoru. Liberec: TUL, 2004, Studijní materiály
- [2] **Štecha, J.** : Teorie dynamických systémů. Praha: ČVUT, 2003, Transparenty pro přednášky
- [3] **Šulc, B., Vítečková, M.** : Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů. Praha: ČVUT, 2004
- [4] **Balátě, J.** : Automatické řízení. Praha: BEN, 2004
- [5] **Nise, Norman S.** : Control Systems Engineering. NY, John Wiley & Sons, Inc. 2000 .
- [6] **Van de Vegte, J.** : Feedback Control Systems. NJ, Prentice-Hall, Inc. 1990
- [7] **Kuo, Benjamin C.** : Automatic Control Systems. London, Prentice-Hall, Inc. 1991 .

## **Seznam příloh**

<b>Příloha č.1</b> – Softwarová podpora programu Matlab	2
<b>Příloha č.2</b> – Zdrojový kód pro identifikaci regulované soustavy v programu Matlab	2
<b>Příloha č.3</b> – Zdrojový kód pro návrh regulátorů regulované soustavy	5
<b>Příloha č.4</b> – CD-ROM	

## **Příloha č.1** – Softwarová podpora programu Matlab

Funkce **TF** - vytvoří spojitého (resp. diskrétního) přenos systému pomocí čitatele a jmenovatele soustavy

$SYS = TF(NUM,DEN)$  NUM – čítecetel systému

$SYS = TF(NUM,DEN,TS)$  DEN – jmenovatel systému

TS – vzorkovací perioda

Funkce **ACKER** - vypočte matici stavového regulátoru pomocí metody přiřazení pólů obvodu

$K = ACKER(A,B,P)$

A – matice dynamiky systému

B – matice buzení systému

P – požadované rozmístění pólů obvodu

Modifikovaný výpočet matice estimátoru pomocí metody přiřazení pólů obvodu

$L = ACKER(MT,CT,P)^T$

MT – transpozice matice dynamiky systému

CT – transpozice matice výstupu systému

P – požadované rozmístění pólů obvodu

Funkce **DLQR** - vypočte matici diskrétního stavového regulátoru podle kvadratického kritéria

$J = \text{Sum} \{x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u\}.$

$[K,S,E] = DLQR(A,B,Q,R,N)$  A – matice dynamiky systému

B – matice buzení

Q – váhová matice stavových veličin v krit. J

R – váhová matice pro akční vel. v krit. J

N – váhová matice bilineárního členu v krit. J

S – řešení Riccatiho rovnice

E – kořeny char. polynomu systému

K – optimální diskrétní stavový regulátor minimalizující kritérium J

Funkce **FMINSEARCH** - výpočet minimalizační funkce

$X = \text{FMINSEARCH}(\text{FUN}, X_0, \text{OPTIONS})$

FUN - řešení kritéria popsaného v m-souboru

$X_0$  - počáteční odhad parametrů

OPTIONS - parametry minimalizace

$X$  - nalezený odhad

Funkce **DLINMOD** - ze simulačního programu vypočte parametry diskrétního systému

$[A, B, C, D] = \text{DLINMOD}('SYS', TS)$

'SYS' - jméno programu v matlab/simulink (simulační schéma)

TS - perioda vzorkování

A, B, C, D - získané matice systému ze simulace

Pozn. Pomocí této funkce získáme matici systému a z této funkce lze získat rozložení kořenů charakteristického polynomu

## Příloha č.2 – Zdrojový kód pro identifikaci regulované soustavy v programu Matlab

```
close all ; clear all;
```

```
global Tmax B A uG yG ti yi tG %N globalni pro vsechny podprogramy
%% Inicializace
load r3_2.mat; data = ans;
%% Intervaly
I = 4004;
II = 8028;
%% Upraveni hodnot
t = data(1, I:II);
u = data(4, I:II)*10;
y = data(3, I:II);
% posunuti hodnot do pocatku
tG = (t - t(1))'; dt = tG(2);
uG = (u - u(1))'
yG = (y - (y(1)))'
%%
figure;
plot(tG, uG, tG, yG); grid on;
title('Hodnoty pro identifikaci');
YLABEL('ul, yl [V]'); XLABEL('t [s]');
legend('uG', 'yG');

% Pevne vnucené kmity
K = 1;
alfa = -2.95;
Tp = 0.0472; %vypoctene, 0.0482 odecten y grafu T=0.3030
wn = 1/Tp
```

```

A1 = 1/(alfa*alfa+wn*wn);
A0 = (-2*alfa)/(alfa*alfa+wn*wn);
cit1=[A1 A0 1]

x= [0.0021    0.0046    0.9562    0.0003    0.0115    0.1644] %dobre
B = [x(1) x(2) x(3)];
A = [x(4) x(5) x(6) 1]; % 3.rad
sys = tf(B,A);
[B A] = tfdata(sys,'v')
%% Minimalizace pomoci sim
Tmax = tG(end);

vypkrit(x)
disp('running...')
OPTIONS = optimset('TolFun',1e-22,'MaxFunEvals',40,'Display','iter');
%najde minimum
x = fminsearch('vypkrit',x,OPTIONS);
disp('optimalizovany vektor x')
x
disp('Hodnota kriteria J')
vypkrit(x)

sim('Sysim2',Tmax);
hold off
figure(2); plot(tG, uG, 'g',tG, yG,'b', ti, yi,'r','linewidth',2);
grid on;
legend('u','y-merene','y-aproximovane'); xlabel('t [s]');
ylabel('y/u');
title('Prechodova charakteristika');
% sys=tf(B,A)
A=conv(cit1,A);
roots(A)
sys = tf(B,A)

[P Z] =pzmap(sys);
figure(3);
plot(real(P),imag(P),'x r');grid
figure(3);
plot(real(Z),imag(Z),'o r');

figure(4); grid on; pzmap(sys);
figure; grid on; step(sys);
figure; grid on;

[Rel,Im1]=nyquist(sys);
Re=[0.9562,Rel(1,:)]
Im=[0,Im1(1,:)]

plot(Re(1,:),Im(1:,:), 'linewidth',2);
grid on;
title('Nyquistova charakteristika');
YLABEL('Im'); XLABEL('Re');

```

### Příloha č.3 – Zdrojový kód pro návrh regulátorů regulované soustavy v programu

#### Matlab

```
clc
clear all
close all
% Pro system r3_1.mat
B3=[0.00217    0.00424    0.9562];
A3=[0.000000688422615    0.000030942957462    0.000832890498985
0.016605285763513 0.177294264860568 1];
% Pro system r2
B2=[0.00155    0.00104    0.9562];
A2=[0.000000300132203    0.000015276729118    0.000526003598577
0.011870645659135 0.161155222006804 1];
% Pro system r1
B1=[0.00121    0.00668    0.9562]; % stare
A1=[0.000000147064382    0.000009621512133    0.000407644492553
0.00957139772273 0.155669749313184 1]; %stare
%////////////////////////////////////////
% Pro system r0
B0=[0.00055    0.00791    0.9562]; %stare
A0=[0.000000034597788    0.000002955474844    0.000210631989005
0.00711342571736 0.145729148434944 1];%stare

% tfa=tf(B1,A1);
% tfc=tf(B,A);
% step(tfa,tfc)
%
%step(tf(B,A))

%% testovací prenos na robustnost
%
B=[0.0021 0.0046 0.9562]; % citatel prenosu
A=[0.000000655640586    0.000029001168593    0.000807575087096
0.015805285763513 0.177294264860568 1]; %jmenovatel prenosu

PERIODA=0.1 %perioda vzorkovani
a=A;
b=B;
[aa,bb,cc,dd] = tf2ss(B,A); % stavovy popis systemu referencni
[aa0,bb0,cc0,dd0] = tf2ss(B0,A0); % stavovy popis systemu bez
zavazi
[aa1,bb1,cc1,dd1] = tf2ss(B1,A1); % stavovy popis systemu s 1
zavazim
[aa2,bb2,cc2,dd2] = tf2ss(B2,A2); % stavovy popis systemu s 2
zavazima
[aa3,bb3,cc3,dd3] = tf2ss(B3,A3); % stavovy popis systemu s 3
zavazima

%% NFP
% NFP je prezentovano maticemi AP,BP,CP,DP,
AP=aa';
BP=cc';
CP=bb';
DP=0;

KPI=diag([1 44.233 1231.7345 20757 263080]);KP=inv(KPI);
AP=KP*AP*KPI; BP=KP*BP; CP=CP*KPI;
```

```

AP0=aa0';
BP0=cc0';
CP0=bb0';
DP0=0;
KPI=diag([1 44.233 1231.7345 20757 263080]);KP=inv(KPI);
AP0=KP*AP0*KPI; BP0=KP*BP0; CP0=CP0*KPI;

AP1=aa1';
BP1=cc1';
CP1=bb1';
DP1=0;
KPI=diag([1 44.233 1231.7345 20757 263080]);KP=inv(KPI);
AP1=KP*AP1*KPI; BP1=KP*BP1; CP1=CP1*KPI;

AP2=aa2';
BP2=cc2';
CP2=bb2';
DP2=0;
KPI=diag([1 44.233 1231.7345 20757 263080]);KP=inv(KPI);
AP2=KP*AP2*KPI; BP2=KP*BP2; CP2=CP2*KPI;

AP3=aa3';
BP3=cc3';
CP3=bb3';
DP3=0;
KPI=diag([1 44.233 1231.7345 20757 263080]);KP=inv(KPI);
AP3=KP*AP3*KPI; BP3=KP*BP3; CP3=CP3*KPI;

%% NFR
disp(' Riditelnost ');
A=aa;
B=bb;
C=cc;
D=dd;

A=fliplr(flipud(A));B=fliplr(flipud(B));C=fliplr(flipud(C));
KI=diag([6.857e-7 3.913e-6 3.578e-5 7.282e-4 0.0125]);K=inv(KI);
A=K*A*KI; B=K*B; C=C*KI;

A0=aa0;
B0=bb0;
C0=cc0;
D0=dd0;
A0=fliplr(flipud(A0));B0=fliplr(flipud(B0));C0=fliplr(flipud(C0));
KI=diag([6.857e-7 3.913e-6 3.578e-5 7.282e-4 0.0125]);K=inv(KI);
A0=K*A0*KI; B0=K*B0; C0=C0*KI;

A1=aa1;
B1=bb1;
C1=cc1;
D1=dd1;
A1=fliplr(flipud(A1));B1=fliplr(flipud(B1));C1=fliplr(flipud(C1));
KI=diag([6.857e-7 3.913e-6 3.578e-5 7.282e-4 0.0125]);K=inv(KI);
A1=K*A1*KI; B1=K*B1; C1=C1*KI;

A2=aa2;
B2=bb2;

```

```

C2=cc2;
D2=dd2;
A2=fliplr(flipud(A2));B2=fliplr(flipud(B2));C2=fliplr(flipud(C2));
KI=diag([6.857e-7 3.913e-6 3.578e-5 7.282e-4 0.0125]);K=inv(KI);
A2=K*A2*KI; B2=K*B2; C2=C2*KI;

A3=aa3;
B3=bb3;
C3=cc3;
D3=dd3;
A3=fliplr(flipud(A3));B3=fliplr(flipud(B3));C3=fliplr(flipud(C3));
KI=diag([6.857e-7 3.913e-6 3.578e-5 7.282e-4 0.0125]);K=inv(KI);
A3=K*A3*KI; B3=K*B3; C3=C3*KI;

%% diskretizace
disp(' Diskretizace ');
% NFP
E=eye(size(AP));
MP=expm(AP*PERIODA);
NP=inv(AP)*(MP-E)*BP;

MP0=expm(AP0*PERIODA);
NP0=inv(AP0)*(MP0-E)*BP0;

MP1=expm(AP1*PERIODA);
NP1=inv(AP1)*(MP1-E)*BP1;

MP2=expm(AP2*PERIODA);
NP2=inv(AP2)*(MP2-E)*BP2;

MP3=expm(AP3*PERIODA);
NP3=inv(AP3)*(MP3-E)*BP3;

%NFR

E=eye(size(A));
M=expm(A*PERIODA);
N=inv(A)*(M-E)*B;

M0=expm(A0*PERIODA);
N0=inv(A0)*(M0-E)*B0;

M1=expm(A1*PERIODA);
N1=inv(A1)*(M1-E)*B1;

M2=expm(A2*PERIODA);
N2=inv(A2)*(M2-E)*B2;

M3=expm(A3*PERIODA);
N3=inv(A3)*(M3-E)*B3;
%% Estimace
disp(' Estimace ');
v = 0*[1 1 1 1 1];
vr= 0*[1 1 1 1 1];
% v = eig(MP);
% v=v';
%
% vr = eig(M);
% vr=vr';

```



```

%

disp('Estimator');
% NFP
LP = acker(MP',CP',v)';
LP0 = acker(MP0',CP0',v)';
LP1 = acker(MP1',CP1',v)';
LP2 = acker(MP2',CP2',v)';
LP3 = acker(MP3',CP3',v)';
%NFR
L = acker(M',C',vr)';
L0 = acker(M0',C0',vr)';
L1 = acker(M1',C1',vr)';
L2 = acker(M2',C2',vr)';
L3 = acker(M3',C3',vr)';

i=[.9 .3 0.02 0.025 0.6 ];
qq =[i(1) 0 0 0 0;
      0 i(2) 0 0 0;
      0 0 i(3) 0 0;
      0 0 0 i(4) 0;
      0 0 0 0 i(5) ];
rr =[1];
[pokus,soustav,korenE]=dlqr(MP',CP',qq,rr);
pokus=pokus';

%% rozsireni stavoveho popisu
%rozsireni JaJ MRJ,NRJ,CRJ
%NFP
MRJP=[MP zeros(5,1);CP*MP eye(1)]; % rozsireni stav.popisu
soustavy o astatickou slozku
NRJP=[NP;CP*NP];

MRJP0=[MP0 zeros(5,1);CP0*MP0 eye(1)];
NRJP0=[NP0;CP0*NP0];

MRJP1=[MP1 zeros(5,1);CP1*MP1 eye(1)];
NRJP1=[NP1;CP1*NP1];

MRJP2=[MP2 zeros(5,1);CP2*MP2 eye(1)];
NRJP2=[NP2;CP2*NP2];

MRJP3=[MP3 zeros(5,1);CP3*MP3 eye(1)];
NRJP3=[NP3;CP3*NP3];

%NFR

MRJ=[M zeros(5,1);C*M eye(1)]; % rozsireni stav.popisu soustavy o
astatickou slozku
NRJ=[N;C*N];

MRJ0=[M0 zeros(5,1);C0*M0 eye(1)];
NRJ0=[N0;C0*N0];

MRJ1=[M1 zeros(5,1);C1*M1 eye(1)];
NRJ1=[N1;C1*N1];

MRJ2=[M2 zeros(5,1);C2*M2 eye(1)];

```

```

NRJ2=[N2;C2*N2];

MRJ3=[M3 zeros(5,1);C3*M3 eye(1)];
NRJ3=[N3;C3*N3];

%% regulator
% PP = eig(MRJP)
% PP=PP'
% % PR = eig(MRJ)
% % PR=PR'
% PP(1)=0;
% % PR(1)=0;
PP = 0*[1 1 1 1 1 1];
PR = 0*[1 1 1 1 1 1];

% PR = [-0.3879 + 0.6384i
%        -0.3879 - 0.6384i
%        0.5395
%        0.1427
%        0.1765 + 0.3198i
%        0.1765 - 0.3198i];
PR=PR'
PP=PP'
PP=PR;
disp('Regulatory');
RPA = acker(MRJP,NRJP,PP);
RPA0 = acker(MRJP0,NRJP0,PP);
RPA1 = acker(MRJP1,NRJP1,PP);
RPA2 = acker(MRJP2,NRJP2,PP);
RPA3 = acker(MRJP3,NRJP3,PP);

RA = acker(MRJ,NRJ,PR);
RA0 = acker(MRJ0,NRJ0,PR);
RA1 = acker(MRJ1,NRJ1,PR);
RA2 = acker(MRJ2,NRJ2,PR);
RA3 = acker(MRJ3,NRJ3,PR);

i=[0.1 0.01 0.1 0.01 1 1]; % navrh pro kvadraticke kriterium NFP
Qp =[i(1) 0 0 0 0 0;
      0 i(2) 0 0 0 0;
      0 0 i(3) 0 0 0;
      0 0 0 i(4) 0 0;
      0 0 0 0 i(5) 0;
      0 0 0 0 0 i(6)];
Rp =[1.5];
[RRP,s,e] = dlqr(MRJP,NRJP,Qp,Rp);

```